אינטגרל רימן על $\mathbb{R}^d$

או: תקציר הרצאותיו של פרופ' מיכאל צוויקל ב-35 דקות

ערך וכתב: פיגובסקי בוריס

תקציר לא רשמי זה מהווה "סיכום בעברית" של הרצאותיו של פרופ' צוויקל בנושא אינטגרל רימן. המקור באנגלית ניתן להורדה מן האתר של פרופ' צוויקל:

http://www.math.technion.ac.il/~mcwikel/infi2/intgrn-n.ps

הערות והארות בנושא התקציר ניתן לשלוח אל העורך בדף האינטרנט:

http://about.borfig.com/contact.asp?to=borfig&title=Integrals

התקציר מתעדכן מעת-לעת (בדרך-כלל בין הרצאה להרצאה), גרסה עדכנית ניתן להוריד ב:

http://www.borfig.com/math/intgrn.ps

אני ממליץ להצטרף לרשימת התפוצה "BORFIG.com Math News" כדי לקבל הודעות לגבי עדכונים בתקציר זה:

http://www.borfig.com/enews.asp

חלוקת הנושאים בתקציר זה שונה מן המקור, כך גם מספור ההגדרות/הטענות/למות/המשפטים.

מבוא

לאינטגרלים יש הרבה ישומים בתחומים רבים, אך אחת המוטיבציות העיקריות היא פיתוח כלי חישוב השטח (נפח, וכו') "מתחת" לפונקציה נתונה (כרגע אנו לא ממש יודעים מה המשמעות של המונחים "שטח" או "נפח"). אם הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ "מתנהגת" יפה, אזי השטח ניתן על-ידי אינטגרל-ריימן $\int_a^b f(x)dx$. לפני שבאמת ניגש לפיתוח התאוריה נסתכל בכמה דוגמאות (או נכון יותר: ציפיות):

- אם $f=c$ היא פונקציה קבועה כאשר $c\geq 0$, אזי $\int_a^b cdx=(b-a)c$, מפני שאנו מחשבים שטח של מלבן;
- אם $f(x)=cx$, אזי $\int_0^b cxdx=c\frac{b^2}{2}$ לכל $b,c\geq 0$, מפני שאנו מחשבים שטח של משולש;
- אם $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ כאשר $r\geq 0$, אזי $\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\pi r^2$, מפני שאנו מחשבים שטח של חצי-עיגול;
- תהא $D\triangleq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\,x^2+y^2\leq r^2\}$, ותהא $f:D\to\mathbb{R}$ מוגדרת כך: $f(x,y)\triangleq\sqrt{r^2-x^2-y^2}$, אזי: $\iint_D f(x,y)dA=\frac{2}{3}\pi r^3$, מפני שכרגע חישבנו נפח של חצי-כדור.

בדרך-כלל לומדים קודם על אינטגרלים מן הצורה $\int_a^b f(x)dx$ ורק מאוחר יותר עוברים לאינטגרלים כפולים ומשולשים. אם נתבונן בהם מקרוב, נראה כי אינטגרלים אלה הם כמעט אותו הדבר. אנו נפתח את התאוריה של רימן במקביל עבור כל ה-d-אינטגרלים.

תוכן ענינים

פרק 1

פונקציה מציינת

פונקציה מציינת הינה בסך-הכל:

הגדרה 1.1 (**פונקציה מציינת**) תהא X קבוצה כלשהיא, ותהא $A \subseteq X$ תת-קבוצה כלשהיא. **הפונקציה המציינת של** A, $\chi_A : X \to \{0,1\}$, מוגדרת באופן הבא: אם $a \in A$, אזי $\chi_A(a) \triangleq 1$, אחרת (אם $a \notin A$), $\chi_A(a) \triangleq 0$.

הפונקציה המציינת היא למעשה דרך לתאר שייכות לקבוצה כפונקציה. נשים לב כי הפונקציה המציינת "מולדת" עם קבוצה, והיא מקבלת קלט בודד - איבר מ-X. הנה מספר דוגמאות ב-$X = \mathbb{R}$:

דוגמא 1.1 הפונקציה $\chi_\emptyset$ היא למעשה הפונקציה הקבועה 0; לעומת זאת, הפונקציה $\chi_\mathbb{R}$ היא למעשה הפונקציה הקבועה 1.

דוגמא 1.2 הפונקציה $\chi_\mathbb{Q}$ היא פונקצית-דיריכלה.

הנה מספר תכונות של הפונקציה המציינת:

טענה 1.1 תהא X קבוצה כלשהיא, ותהא $A \subseteq X$ תת-קבוצה כלשהיא, אזי $\chi_{X \setminus A} = 1 - \chi_A$.

הוכחה: לכל $x \in X$: $\chi_{X \setminus A}(x) = 1$ אם"ם $x \in X \setminus A$ אם"ם $x \notin A$ אם"ם $\chi_A(x) = 0$. ■

טענה 1.2 כל פונקציה f שהטווח שלה הוא $\{0,1\}$ היא פונקציה מציינת של $f^{-1}(1)$.

הוכחה: נתונה $f : X \to \{0,1\}$, ונגדיר $A \triangleq \{x \in X | f(x) = 1\}$. אזי לכל $x \in X$: $\chi_A(x) = 1$ אם"ם $x \in A$ אם"ם $f(x) = 1$. ■

טענה 1.3 אם $A, B \subseteq X$, אזי $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

הוכחה: אם $x \in A \cap B$, אזי $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$. אחרת $\chi_{A \cap B}(x) = 0$ ומתקיים: $x \notin A$ או $x \notin B$, ולכן $\chi_A(x) = 0$ או $\chi_B(x) = 0$ בהתאמה. מכאן נקבל כי $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$. ■

טענה 1.4 אם $A, B \subseteq X$, אזי $\chi_{A \setminus B} = \chi_B - \chi_A$.

הוכחה: אם $x \in A \setminus B$, אזי $\chi_A(x) = 1$ ו-$\chi_B(x) = 0$, אבל $1 = 1 - 0$. אם $x \notin A \setminus B$, אזי $x \in A \cap B$ או $x \notin A$, ולכן נקבל כי $0 = 1 - 1$ או $0 = 0 - 0$ בהתאמה. ■

טענה 1.5 אם $A, B \subseteq X$, אזי $A \subseteq B$ אם ורק אם $\chi_A \leq \chi_B$.

הוכחה: אם $A \subseteq B$, אזי לכל $x \in B$, נקבל $\chi_B = 1$, בעוד ש-$\chi_A(x) \leq 1$. אם $x \notin B$, אזי בפרט $x \notin A$, ולכן $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$.

אם $\chi_A \leq \chi_B$, ו-$x \in A$, כלומר $\chi_A(x) = 1$. לכן $\chi_B(x) = 1$, כלומר $x \in B$. ■

למעשה המושג "קבוצה" והמושג "פונקציה מציינת" הם זהים לחלוטין: את טענות 1.2 ו-1.5 ניתן לשלב למשפט הבא:

משפט 1.1 תהי X קבוצה, ותהא $C(X) = \{\chi_A : X \to \{0,1\} | A \subseteq X\}$, אזי $C(X)$ ו-$P(X)$ הם איזומורפי-סדר.

הוכחה: נוכיח כי ההעתקה $\Xi : A \mapsto \chi_A$ היא איזומורפיזם-סדר: אם $A \neq B$, אזי קיים $x \in A \setminus B$ או $x \in B \setminus A$, ולכן $\chi_A(x) \neq \chi_B(x)$, ולכן $\chi_A \neq \chi_B$, כלומר ההעתקה Ξ היא $1-1$. אם $f \in C(x)$ היא פונקציה מציינת, אזי על-פי טענה 1.2 היא מקיימת $f = \chi_{f^{-1}(1)}$, ולכן Ξ על. טענה 1.5 נותנת לנו כי הסדר $\subseteq$ ב-$P(X)$ שקול ל-$\leq$ ב-$C(X)$. ■

לבסוף, פונקציה מציינת יכולה להיות מאוד שימושית כדי לתאר איחודים זרים בקצרה:

למה 1.1 תהא $\mathbb{A}$ משפחה של תת-קבוצות של X (סופית או אינסופית) כך שהסכום $\sum_{A \in \mathbb{A}} \chi_A(x)$ הוא סופי לכל $x \in X$, אזי $\sum_{A \in \mathbb{A}} \chi_A$ היא פונקציה מציינת אם"ם כל שתי קבוצות שונות ב-$\mathbb{A}$ הן זרות. יתר על כן, אם $\sum_{A \in \mathbb{A}} \chi_A$ היא פונקציה מציינת, אזי היא הפונקציה המציינת של $\bigcup \mathbb{A}$.

הוכחה: נסמן $S \triangleq \sum_{A \in \mathbb{A}} \chi_A$. אם $x \in A \cap B$ כאשר $A, B \in \mathbb{A}$ שונות, אזי $S(x) \geq 2$ בסתירה לכך ש-$S(x) \in \{0,1\}$. ולכן A, B קבוצות זרות.

אם $A \cap B = \emptyset$ לכל $A, B \in \mathbb{A}$ שונות, ו-$x \in \bigcup \mathbb{A}$, אזי קיים $A \in \mathbb{A}$ יחיד כך ש-$x \in A$, כלומר $\chi_A(x) = 1$, וגם $\chi_B(x) = 0$ לכל $B \in \mathbb{A} \setminus \{A\}$. מכאן נקבל כי $S(x) = 1$. ואם $x \notin \bigcup \mathbb{A}$, אזי ברור כי $\chi_A(x) = 0$ לכל $A \in \mathbb{A}$.

אם S היא פונקציה מציינת של $\bigcup \mathbb{A}$. ■

לאור הלמה, נסמן משפחה זרה (כל איבריה זרים זה לזה) ב"סימון": $\chi_{\cup \mathbb{A}} = \sum_{A \in \mathbb{A}} \chi_A$. החל מן הפרק הבא, הקבוצה X תהיה $\mathbb{R}^d$.

פרק 2

d-קטעים

d-קטעים יהוו בסיס נוח לתיאור צורות מלבניות אלמנטריות:

הגדרה 2.1 **(d-קטע)** ב-$\mathbb{R}$ לכל $a,b\in\mathbb{R}$ הקבוצה $[a,b)$ תקרא 1-**קטע חסום** והקבוצות $\mathbb{R}, (-\infty,b), [a,\infty)$ נקראות 1-**קטעים לא חסומים**;
ב-$\mathbb{R}^d$ קבוצה $I\subseteq\mathbb{R}^d$ תיקרא d-**קטע** אם היא מהווה מכפלה קרטזית של d 1-קטעים. אם כל הכפולות חסומות אזי I יקרא d-**קטע חסום**, אחרת הוא יקרא d-**קטע לא חסום**.

נשים לב כי גם $\emptyset=[a,a)^d$ הוא d-קטע חסום. התכונה הראשונה של d-קטעים היא:

למה 2.1 אם $\mathbb{I}$ היא משפחה **סופית** של d-קטעים ב-$\mathbb{R}^d$, אזי $\bigcap\mathbb{I}$ הוא d-קטע.

הוכחה: מספיק להראות זאת עבור שני d-קטעים I,J ב-$\mathbb{R}^d$:

מקרה א': $d=1$: נפרק למספר מקרים:

- אם $I=\mathbb{R}$ או $J=\mathbb{R}$, אזי אין מה להוכיח;
- אם $I=[a_I,b_I)$ ו-$J=[a_J,b_J)$, אזי $I\cap J=[\max\{a_I,a_J\},\min\{b_I,b_J\})$;
- אם $I=(-\infty,b_I)$ ו-$J=(-\infty,b_J)$, אזי $I\cap J=(-\infty,\min\{b_I,b_J\})$;
- אם $I=[a_I,\infty)$ ו-$J=[a_J,\infty)$, אזי $I\cap J=[\max\{a_I,a_J\},\infty)$.

מקרה ב': $d>1$: אם $I=\prod_{k=1}^d I_k$ ו-$J=\prod_{k=1}^d J_k$ הם d-קטעים, אזי:

$$I\cap J=\left(\prod_{k=1}^d I_k\right)\cap\left(\prod_{k=1}^d J_k\right)=\prod_{k=1}^d (I_k\cap J_k)$$

אבל $I_k\cap J_k$ הם 1-קטעים, ולכן $I\cap J$ הוא d-קטע. ■

חשוב לציין כי איחוד של מספר אינסופי של d-קטעים איננו בהכרח d-קטע:

דוגמא 2.1 $I_n=\left[0,\frac{1}{n}\right)$. I_n הוא 1-קטע חסום לכל $n\in\mathbb{N}$, אבל חיתוכם $\bigcap_{n=1}^\infty I_n=[0,0]$ איננו 1-קטע.

לגבי d-קטעים חסומים, יש לנו:

למה 2.2 אם I הוא d-קטע חסום, אזי $\mathbb{R}^d \setminus I$ הוא איחוד זר של $2d$ d-קטעים.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על d. עבור $d = 1$, זה ברור: אם $I = [a, b)$ כאשר $a \leq b$, אזי $\mathbb{R} \setminus I = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$. כעת נניח כי עבור d כלשהוא הטענה נכונה. יהא I $(d+1)$-קטע, ולכן $I = I_d \times [a, b)$ כאשר I_d הוא d-קטע ו-$a \leq b$. כעת, אנו כבר יודעים כי $\mathbb{R}^d \setminus I_d$ הוא איחוד זר של $2d$ d-קטעים, שנסמנם $\{J_k\}_{k=1}^{2d}$. נתבונן באיחוד הבא:

$$\bigcup_{k=1}^{2d} J_k \times [a, b) = \left(\bigcup_{k=1}^{2d} J_k\right) \times [a, b) = (\mathbb{R}^d \setminus I_d) \times [a, b)$$

השיוויון הראשון נובע מן העובדה כי $\{J_k\}_{k=1}^{2d}$ זרים. וכדי להשלים את האיחוד, נוסיף את $\mathbb{R}^d \times (-\infty, a)$ ו-$\mathbb{R}^d \times [b, \infty)$ שזרים לאיחוד הנ"ל, ונקבל:

$$\begin{aligned}((\mathbb{R}^d \setminus I_d) \times [a, b)) \cup (\mathbb{R}^d \times (-\infty, a)) \cup (\mathbb{R}^d \times [b, \infty)) &= ((\mathbb{R}^d \setminus I_d) \times [a, b)) \cup (\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R} \setminus [a, b))) \\ &= ((\mathbb{R}^d \times [a, b)) \cup (\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R} \setminus [a, b)))) \setminus (I_d \times [a, b)) \\ &= (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \setminus I = \mathbb{R}^{d+1} \setminus I\end{aligned}$$

כך קיבלנו איחוד זר של $2(d+1)$ $(d+1)$-קטעים שאיחודם הוא $\mathbb{R}^{d+1} \setminus I$. ■
למה זו תהא הצעד הראשון להוריד מספר דרישות בהגדרות שיבואו. למה שימושית נוספת היא:

למה 2.3 אם $\{I_i\}_{i=1}^n$ היא משפחה סופית של d-קטעים חסומים, אזי קיים d-קטע חסום L כך ש-$\bigcup_{i=1}^n I_i \subseteq L$.

הוכחה: נסמן:

$$\begin{aligned}\forall_{i=1}^n \quad I_i &= \prod_{k=1}^d [\alpha_{i,k}, \beta_{i,k}) \\ L &\triangleq \prod_{k=1}^d [\min_{i=1}^n \alpha_{i,k}, \max_{i=1}^n \beta_{i,k})\end{aligned}$$

אם $x = (x_k)_{k=1}^d$ היא נקודה ב-$\bigcup_{i=1}^n I_i$, אזי קיים i כך ש-$x \in I_i$, ומתקיים $\alpha_{i,k} \leq x < \beta_{i,k}$ לכל k, ולכן $x \in L$. ■
לבסוף, נגדיר "אורך" של d-קטע:

הגדרה 2.2 (d-**אורך**) יהי $I = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i)$ d-קטע חסום ב-$\mathbb{R}^d$, כאשר $a_i \leq b_i$ לכל i, אזי ה-d-**אורך** של I הוא:

$$|I| \triangleq |I|_d \triangleq \prod_{k=1}^d (b_k - a_k)$$

אם J הוא d-קטע לא חסום ב-$\mathbb{R}^d$, נסמן: $|J| \triangleq |J|_d \triangleq \infty$.

בשלב זה נסטה ממהלך הדברים ונעבור על רב-d-קטעים.

2.1 רב-d-קטעים (קבוצות אלמנטריות)

הגדרה 2.3 (**רב-d-קטע, קבוצה אלמנטרית**) תהי $\{I_i\}_{i=1}^n$ משפחה זרה וסופית של d-קטעים חסומים, אזי $G \triangleq \bigcup_{i=1}^n$ יקרא **רב-d-קטע**.

ברור כי כל d-קטע הוא רב-d-קטע. נוכיח כמה תכונות בסיסיות של רב-d-קטעים.

טענה 2.1 יהא $G \subseteq \mathbb{R}^d$ רב-d-קטע ו-$I \subseteq \mathbb{R}^d$ הוא d-קטע, אזי $G \cap I$ הוא רב-d-קטע.

הוכחה: תהא $\{I_i\}_{i=1}^n$ משפחה זרה וסופית של d-קטעים המגדירה את G, אזי:

$$G \cap I = I \cap \bigcup_{i=1}^n I_i = \bigcup_{i=1}^n (I \cap I_i)$$

ה-d-קטעים $I \cap I_i$ חסומים וזרים זה לזה, ולכן $G \cap I$ הוא רב-d-קטע. ■

למה 2.4 תהי $\{G_i\}_{i=1}^n$ משפחה זרה וסופית של d-קטעים, אזי $\bigcup_{i=1}^n G_i$ הוא רב-d-קטע.

הוכחה: קודם כל, לכל $i \neq j$ המשפחות היוצרות את G_i ואת G_j זרות, ולכן אם נאחד את המשפחות המגדירות את G_i, נקבל משפחה זרה וסופית של d-קטעים המגדירה את $\bigcup_{i=1}^n G_i$. ■

טענה 2.2 יהא $G \subseteq \mathbb{R}^d$ רב-d-קטע ו-$I \subseteq \mathbb{R}^d$ הוא d-קטע, אזי $G \setminus I$ הוא רב-d-קטע.

הוכחה: קיימת משפחה זרה של d-קטעים $\{I_i\}_{i=1}^{2d}$ כך ש-$I = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{2d} I_i$, ולכן

$$G \setminus I = G \cap \bigcup_{i=1}^{2d} I_i = \bigcup_{i=1}^{2d} (G \cap I_i)$$

$G \cap I_i$ הוא רב-d-קטע, והאיחוד הוא זר, ולכן $G \setminus I$ הוא רב-d-קטע. ■

למה 2.5 אם $G, H \subseteq \mathbb{R}^d$ הם רב-d-קטעים, אזי גם $G \cap H$ הוא רב-d-קטע. בפרט כל חיתוך סופי של רב-d-קטעים הוא רב-d-קטע.

הוכחה: תהא $\{I_i\}_{i=1}^n$ המשפחה המגדירה את H, אזי

$$G \cap H = \bigcup_{i=1}^n (G \cap I_i)$$

$G \cap I_i$ הוא רב-d-קטע, ולכן גם האיחוד $G \cap H$ הוא רב-d-קטע כי $G \cap I_i$ ו-$G \cap I_j$ זרים לכל $i \neq j$. ■

למה 2.6 אם $G, H \subseteq \mathbb{R}^d$ הם רב-d-קטעים, אזי גם $G \setminus H$ הוא רב-d-קטע.

הוכחה: תהא $\{I_i\}_{i=1}^n$ המשפחה המגדירה את H. נגדיר:

$$E_k \triangleq G \setminus \bigcup_{i=1}^k I_i$$

נוכיח באינדוקציה על k כי E_k הוא רב-d-קטע, ובפרט $E_n = G \setminus H$. עבור $k = 1$ הוכחנו. כעת נניח כי E_k רב-d-קטע, אבל $E_{k+1} = E_k \setminus I_{k+1}$, ולכן E_{k+1} גם רב-d-קטעי. נציב $k = n$, ונקבל כי $G \setminus H$ הוא רב-d-קטע. ■

למה 2.7 אם $G, H \subseteq \mathbb{R}^d$ הם רב-d-קטעים, אזי גם $G \cup H$ הוא d-קטע. בפרט, כל איחוד סופי של רב-d-קטעים הוא רב-d-קטע.

הוכחה: $G \cup H$ הוא איחוד זר של הרב-d-קטעים הבאים: $G \cap H$, $H \setminus G$ ו-$G \setminus H$. ■
כעת נגדיר את אורך/שטח/נפח של רב-d-קטעים:

הגדרה 2.4 (d-**אורך**) יהא $G \subseteq \mathbb{R}^d$ רב-d-קטע שנוצר על-ידי $\{I_i\}_{i=1}^n$. נגדיר את ה-d-**אורך** של G:

$$|G| \triangleq |G|_d \triangleq \sum_{i=1}^n I_i$$

הגדרה זו תלויה בהצגתו של G. אנו נוכיח כי זה לא כך.

למה 2.8 יהיו $G, H \subseteq \mathbb{R}^d$ רב-d-קטעים, אזי

(i) אם $G \cap H = \emptyset$, אזי $|G \cup H| = |G| + |H|$;

(ii) אם $G \subseteq H$, אזי $|G| \leq |H|$;

(iii) אם $G = H$, אזי $|G| = |H|$, ולכן הגדרה 2.4 מוגדרת היטב.

הוכחה: אם $G \cap H = \emptyset$, אזי $G \cup H$ הוא איחוד זר של $m + n$ d-קטעים, ולכן:

$$|G \cup H| = \sum_{i=1}^m |I_i| + \sum_{j=1}^n |J_j| = |G| + |H|$$

כעת נניח כי $G \subseteq H$. ברור כי H הוא איחוד זר של הרב-d-קטעים G ו-$H \setminus G$, ולכן $|H| = |G| + |H \setminus G|$, אבל d-אורך הוא אי-שלילי, ולכן $|G| \leq |H|$. אם בפרט $G = H$, אזי $|G| \leq |H|$ וגם $|H| \leq |G|$, ולכן $|G| = |H|$. ■
לבסוף: [1]

משפט 2.1 יהי I d-קטע **חסום**, ותהא $\{I_i\}_{i=1}^n$ משפחה **זרה וסופית** של d-קטעים כך ש-$I = \bigcup \mathbb{I}$, אזי $|I| = \sum_{i=1}^n |I_i|$.

הוכחה: מצד אחד I הוא רב-d-קטע, ומצד שני הוא d-קטע, אבל חישוב ה-d-אורך לא תלוי בהצגה. ■
לסיום, נציג דרכים ליצירת רב-d-קטעים:

טענה 2.3 יהא $G \subseteq \mathbb{R}^d$ רב-d-קטע ויהא I k-קטע חסום, אזי $G \times I$ הוא רב-$(d+k)$-קטע, ומתקיים $|G \times I| = |G| \cdot |I|$.

הוכחה: אם $\{I_i\}_{i=1}^n$ היא המשפחה היוצרת של G, אזי $\{I_i \times I\}_{i=1}^n$ היא משפחה זרה וסופית של $(d+k)$-קטעים חסומים, אבל גם מתקיים: $\bigcup_{i=1}^n (I_i \times I) = G \times I$. $|I_i \times I| = |I_i| \cdot |I|$ לכל i, ולכן $|G \times I| = |G| \cdot |I|$. ■

למה 2.9 יהא $G \subseteq \mathbb{R}^d$ רב-d-קטע ויהא $H \subseteq \mathbb{R}^k$ רב-k-קטע, אזי $G \times H$ הוא רב $(d+k)$-קטע, ומתקיים $|G \times H| = |G| \cdot |H|$.

הוכחה: תהא $\{I_i\}_{i=1}^n$ משפחה היוצרת את H, אזי $G \times I_i$ הוא רב-d-קטע, והמשפחה $\{G \times I_i\}_{i=1}^n$ היא משפחה זרה, ולכן $G \times H$ הוא רב-d-קטע. ■
כעת אנו נחזור למהלך הדברים.

[1] משפט זה הוצג בכיתה ללא הוכחה, ונאמר כי קיימת הוכחה באינדוקציה. אני חושב אחרת.

פרק 3

פונקציות d-מדרגות

פונקצית d-מדרגות הינה פונקציה שה"אינטגרל" שלה הוא פשוט ביותר. כדי לחסוך במילים נגדיר:

הגדרה 3.1 (**כיסוי**) תהא $\mathbb{A}$ משפחה של קבוצות, ו-$B \subseteq \bigcup \mathbb{A}$. נאמר כי $\mathbb{A}$ **מכסה** את B, או: $\mathbb{A}$ היא **כיסוי** של B. אם $\mathbb{A}$ היא משפחה זרה, כלומר כל איבריה זרים זה לזה, אזי נומר כי $\mathbb{A}$ היא **כיסוי זר** של B. אם $\mathbb{A}$ היא משפחה של d-קטעים, נאמר כי $\mathbb{A}$ היא d-**כיסוי** של B.

כעת נגדיר פונקצית d-מדרגות:

הגדרה 3.2 (**פונקצית d-מדרגות**) יהא $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ d-כיסוי זר וסופי של $\mathbb{R}^d$, ותהא $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה סופית של מספרים, כאשר מתקיים: אם I_k לא חסום, אזי $\lambda_k = 0$. אזי הפונקציה:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{I_k}$$

תקרא **פונקצית d-מדרגות**. (בהמשך רק אציין את הסכום הנ"ל כדי לציין פונקצית d-מדרגות)

נשים לב כי תמונתה של פונקצית d-מדרגות היא תמיד $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$, מפני שלכל $p \in \mathbb{R}^d$ קיים I_k יחיד כך ש-$p \in I_k$.
הנה מספר דוגמאות:

דוגמא 3.1 הפונקציה הקבועה 0 היא פונקצית d-מדרגות טריוויאלית: $0 = 0\chi_{\mathbb{R}}$; לעומת זאת, הפונקציה הקבועה 1 איננה פונקצית d-מדרגות, כי לא מתקיימת הדרישה ל-$\lambda_i = 0$ כאשר I_i d-קטע לא חסום.

דוגמא 3.2 פונקצית הערך-השלם גם איננה פונקצית d-מדרגות, כי יש "אינסוף" מדרגות; לעומת זאת, הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת כך:

$$f(x) \triangleq \lfloor x \rfloor \chi_{[-100,100)} = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & , x \in [-100, 100) \\ 0 & , x \notin [-100, 100) \end{cases}$$

היא כן פונקצית d-מדרגות.

דוגמא קצת יותר מעניינת:

למה 3.1 יהא I d-קטע חסום, אזי χ_I היא פונקצית d-מדרגות.

הוכחה: על-פי למה 2.2, קיימים $2d$ d-קטעים $\{I_i\}_{i=1}^{2d}$ זרים זה לזה שאיחודם הוא המשלים של I. לכן המשפחה $\{I_i\}_{i=1}^{2d} \cup \{I\}$ היא d-כיסוי זר וסופי של $\mathbb{R}^d$. כעת נבחר $\lambda = 1$, ו-$\lambda_i = 0$, ונקבל כי הפונקציה $1\chi_I + \sum_{i=1}^{2d} 0\chi_{I_i}$ היא פונקצית d-מדרגות על-פי ההגדרה. ■

כעת נוכיח את החלק הראשון של "המשפט המשעמם":

משפט 3.1 (המשפט המשעמם, חלק א') תהאנה f, g פונקציות d-מדרגות, ו-$c \in \mathbb{R}$, אזי גם $f+g$, $f \cdot g$, cf, $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ הן פונקציות d-מדרגות.

הוכחה: רוב הסימונים בהוכחה זו ישמשו אותנו גם בהוכחות של החלקים האחרים של "המשפט המשעמם", כך גם חישובים 3.1 ו-3.2.

נציג קודם את ההוכחה של $f+g$: נסמן $f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{I_i}$ ו-$g = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \chi_{J_j}$. נרצה לבטא את $f+g$ כסכום מן הצורה המתאימה.

נגדיר mn d-קטעים באופן הבא: $K_{(i-1)n+j} \triangleq I_i \cap J_j$.[1] נשים לב כי רובם ריק, ו-$\{K_k\}_{k=1}^{mn}$ היא d-כיסוי זר של $\mathbb{R}^d$. בנוסף, גם האיחודים הבאים זרים:

$$\forall_i \qquad \bigcup_{j=1}^{n} K_{(i-1)n+j} = \bigcup_{j=1}^{n} I_i \cap J_j = I_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} J_j \right) = I_i \cap \mathbb{R}^d = I_i \tag{3.1}$$

$$\forall_j \qquad \bigcup_{i=1}^{m} K_{(i-1)n+j} = \bigcup_{i=1}^{m} I_i \cap J_j = \left(\bigcup_{i=1}^{m} I_i \right) \cap J_j = \mathbb{R}^d \cap J_j = J_j \tag{3.2}$$

כעת נגדיר את "גובהי-המדרגות": $\nu_{(i-1)n+j} = \lambda_i + \mu_j$. נשים לב כי כאשר $K_k = \emptyset$ אין משמעות ל-ν_k. בנוסף אם K_k לא חסום, אזי I_i, J_j המתאימים לא חסומים, ולכן $\lambda_i = \mu_j = \nu_k = 0$, ונותר לבדוק האם $f+g$ היא מן הצורה הנדרשת:

$$f + g = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{I_i} + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \chi_{J_j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \chi_{I_i \cap J_j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \chi_{I_i \cap J_j}$$

השיוויון האחרון נובע מחישובים 3.1 ו-3.2.

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\lambda_i + \mu_j) \chi_{I_i \cap J_j} = \sum_{k=1}^{mn} \nu_k \chi_{K_k}$$

עבור הפונקציות $\min\{f, g\}$ ו-$\max\{f, g\}$ החישוב יהא דומה מאוד לחישוב הנ"ל. נבחר $\nu_{(i-1)n+j} = \max\{\lambda_i, \mu_j\}$ או $\nu_{(i-1)n+j} = \min\{\lambda_i, \mu_j\}$ בהתאמה. החישוב עבור $\min\{f, g\}$ יראה כך:

$$\min\{f, g\} = \min\left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{I_i}, \sum_{j=1}^{n} \mu_j \chi_{J_j} \right\} = \min\left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \chi_{I_i \cap J_j}, \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \chi_{I_i \cap J_j} \right\}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \min\{\lambda_i, \mu_j\} \chi_{I_i \cap J_j} = \sum_{k=1}^{mn} \nu_k \chi_{K_k}$$

[1] הביטוי $(i-1)n+j$ מקבל את הערכים $\{1, \ldots, mn\}$ באופן חד-חד-ערכי, אך פרופ' צוויקל לא הגדיר במפורש את הקשר בין האינדקסים i, j, k של I, J, K בהתאמה.

עבור הפונקציה $f \cdot g$ נבחר $\nu_{(i-1)n+j} = \lambda_i \mu_j$, והחישוב יהא:

$$f \cdot g = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{I_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \chi_{J_j}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (\lambda_i \mu_j)(\chi_{I_i} \cdot \chi_{J_j}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \chi_{I_i \cap J_j} = \sum_{k=1}^{mn} \nu_k \chi_{K_k}$$

ולבסוף, עבור cf נבחר $L_i = I_i$ ו-$\nu_i = c\lambda_i$:

$$cf = c\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{I_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} (c\lambda_i)\chi_{I_i} = \sum_{i=1}^{m} \nu_i \chi_{L_i} \quad \blacksquare$$

למה 3.1 והמשפט נותנים לנו:

למה 3.2 אם $\{I_i\}_{i=1}^{n}$ היא משפחה **סופית** של d-קטעים חסומים (לא בהכרח זרים), ו-$\{\lambda_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}$, אזי הפונקציה $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{I_i}$ היא פונקצית d-מדרגות.

הוכחה: הפונקציות χ_{I_i} הן פונקציות d-מדרגות על-פי למה 3.1. על-פי המשפט, גם $\lambda_i \chi_{I_i}$ הן פונקציות d-מדרגות, ושוב על-פי המשפט הסכום הסופי $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{I_i}$ הוא פונקצית d-מדרגות. $\blacksquare$

כלומר, הדרישות לזרות של ה-d-קטעים וכיסוי מלא מיותרות, וגם נוכל לוותר על ה-d-קטעים הלא חסומים. אנו לא נשתמש בהקלות אלה עד להודעה חדשה. לבסוף נוכיח למה שימושית נוספת:

למה 3.3 תהא f פונקצית d-מדרגות, אזי קיים d-קטע L **חסום** כך ש-$f(\mathbb{R}^d \setminus L) = \{0\}$, כלומר f מתאפסת מחוץ ל-L.

הוכחה: תהא $f = \sum_{i=1} \lambda_i \chi_{I_i}$ פונקצית d-מדרגות. יהא L d-קטע חסום מספיק גדול כך שיכיל את כל ה-d-קטעים החסומים המגדירים את f. L קיים כי מספר ה-d-קטעים החסומים הוא סופי. כעת אם $x \in \mathbb{R}^d \setminus L$, אזי קיים d-קטע I_i יחיד שמכיל את x, כי $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ הוא d-כיסוי זר. I_i הוא לא-חסום, אחרת $I_i \subseteq L$ - סתירה. לכן $\lambda_i = 0$, ו-$f(x) = 0$. $\blacksquare$

למה זו תעזור לנו גם כאשר נעסוק ב-d-אינטגרלים על $\mathbb{R}^d$.

פרק 4

האינטגרל ה"תינוקי" של פונקציות d-מדרגות

האינטגרל ה"תינוקי" הוא פשוט "השטח מתחת לפונקצית ה-d-מדרגות".

הגדרה 4.1 תהא $f=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\chi_{I_i}$ פונקצית d-מדרגות מ-$\mathbb{R}^d$, אזי האינטגרל-התינוקי שלה הוא:

$$\mathcal{I}_d(f)\triangleq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|I_i|$$

מוסכמה: אם $|I_i|=\infty$ (ו-$\lambda_i=0$), נקבע כי $\lambda_i|I_i|=0$.

הגדרה זו לכאורה נראית בסדר, אבל יש בה רק בעיה אחד: האינטגרל ה"תינוקי", על-פי ההגדרה, תלוי בהצגה של f. בעיה זו תפתר בעזרת החלק השני של "המשפט המשעמם". בנוסף נוכיח כי האינטגרל ה"תינוקי" הוא לינארי.

משפט 4.1 (**המשפט המשעמם, חלק ב'**) תהאנה $f=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\chi_{I_i}$ ו-$g=\sum_{j=1}^{n}\mu_j\chi_{J_j}$ פונקציות d-מדרגות ב-$\mathbb{R}^d$.

(i) אם $f\le g$, אזי $\mathcal{I}_d(f)\le\mathcal{I}_d(g)$. בפרט אם $f=g$, אזי $\mathcal{I}_d(f)=\mathcal{I}_d(g)$;

(ii) לכל $c\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathcal{I}_d(f+cg)=\mathcal{I}_d(f)+c\mathcal{I}_d(g)$.

הוכחה: בהוכחה של משפט זה נשתמש בסימונים מן ההוכחה של החלק הראשון: $K_{(i-1)n+j}\triangleq I_i\cap J_j$, וגם נשתמש בחישובים 3.1 ו-3.2.

יהא L d-קטע חסום מספיק גדול כך שאם K_k חסום, אזי $K_k\subseteq L$. ונסמן: $A^*\triangleq A\cap L$. נשים לב כי מתקיים: $K^*_{(i-1)n+j}=I^*_i\cap J^*_j$, יותר מזה: $\lambda|I|=\lambda|I^*|$ כי אם I חסום, אזי הוא מוכל ב-L ומתקיים $I^*=I$, ואם I לא חסום, אזי $\lambda=0$, ועדיין השיוויון נכון. לפני שנוכיח את המשפט, נשדרג את חישובים 3.1 ו-3.2 בעזרת משפט 2.1:

$$\forall_i\qquad \lambda_i|I_i|=\lambda_i|I^*_i|=\lambda_i\left|\bigcup_{j=1}^{n}I^*_i\cap J^*_j\right|=\sum_{j=1}^{n}\lambda_i|I^*_i\cap J^*_j| \tag{4.1}$$

$$\forall_j\qquad \mu_i|J_j|=\mu_j|J^*_j|=\mu_j\left|\bigcup_{j=1}^{m}I^*_i\cap J^*_j\right|=\sum_{i=1}^{m}\mu_j|I^*_i\cap J^*_j| \tag{4.2}$$

נשים לב כי אם $I_i^* \cap J_j^*$ לא ריק, אזי $\lambda_i \le \mu_j$ המתאימים, ולכן $\lambda_i |I_i^* \cap J_j^*| \le \mu_j |I_i^* \cap J_j|$. אחרת אם $I_i^* \cap J_j^* = \emptyset$, אזי האי-שיוויון נכון כי $0 \le 0$. נסיים את ההוכחה בחישוב:

$$\mathcal{I}_d(f) = \sum_{i=1}^m \lambda_i |I_i| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i |I_i^* \cap J_j^*| \le \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mu_j |I_i^* \cap J_j^*| = \sum_{j=1}^m \mu_j |J_j| = \mathcal{I}_d(g)$$

לבסוף, אם $f = g$, אזי מתקיים $f \le g$ וגם $g \le f$, ולכן $\mathcal{I}_d(f) \le \mathcal{I}_d(g)$ וגם $\mathcal{I}_d(g) \le \mathcal{I}_d(f)$, ולכן $\mathcal{I}_d(f) = \mathcal{I}_d(g)$, כלומר הגדרה 4.1 אכן מוגדרת היטב.
נסמן $\nu_{(i-1)n+j} \triangleq \lambda_i + c\mu_j$, ולכן על-פי החלק הראשון נקבל:

$$f + cg = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{I_i} + c \sum_{j=1}^n \mu_j \chi_{J_j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\lambda_i + c\mu_j) \chi_{I_i \cap J_j} = \sum_{k=1}^{mn} \nu_k \chi_{K_k}$$

כעת פשוט נחשב:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_d(f) + c\mathcal{I}_d(g) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i |I_i| + c \sum_{j=1}^n \mu_j |J_j| = \sum_{i=1}^m \lambda_i |I_i^*| + c \sum_{j=1}^n \mu_j |J_j^*| \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i |I_i^* \cap J_j^*| + c \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mu_j |I_i^* \cap J_j^*| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\lambda_i + c\mu_j) |I_i^* \cap J_j^*| \\
&= \sum_{k=1}^{mn} \nu_k |K_k^*| = \sum_{k=1}^{mn} \nu_k |K_k| = \mathcal{I}_d(f + cg) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

לצערנו לא כל פונקציה מ-$\mathbb{R}^d$ ל-$\mathbb{R}$ היא פונקצית d-מדרגות, ולכן יהא עלינו לשכלל את הכלי שנולד, אבל בכל זאת יש דוגמא מעניינת:

דוגמא 4.1 אם G הוא רב-d-קטע, אזי χ_G היא פונקצית d-מדרגות המקיימת $|G| = \mathcal{I}_d(\chi_G)$.

כעת נמשיך לאינטגרלים רגילים.

פרק 5

אינטגרביליות על-פי ריימן

כעת אנו מוכנים להגדיר את אינטגרל ריימן:

הגדרה 5.1 (d**-אינטגרביליות על-פי ריימן,** d**-אינטגרל על** $\mathbb{R}^d$) תהי $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ פונקציה. f תקרא d**-אינטגרבילית ע"פ ריימן** אם קיימות שני סדרות של פונקציות d-מדרגות $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \qquad v_n \le v_{n+1} \le f \le w_{n+1} \le w_n$$

וגם:

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(v_n) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(w_n)$$

הגבול הנ"ל יקרא d**-איטגרל של** f **על** $\mathbb{R}^d$, ויסומן ב-$\int f$ או $\int_{\mathbb{R}^d} f$.

נשים לב כי שני הגבולות בהגדרה תמיד קיימים, זאת כי שתי הסדרות $\{\mathcal{I}_d(v_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{\mathcal{I}_d(w_n)\}_{n=1}^{\infty}$ חסומות ומונוטוניות. עובדה זו מאפשרת לנו להחליף את התנאי האחרון בהגדרה הנ"ל:

למה 5.1 תהאנה $\{v_n\},\{w_n\}$ סדרות של פונקציות d-מדרגות, המתקיימות $v_n \le v_{n+1} \le w_{n+1} \le w_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$, אזי: $\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(v_n) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(w_n)$ אם"ם $\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(w_n - v_n) = 0$.

הוכחה: הגבולות $\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(v_n)$ ו-$\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(w_n)$ תמיד קיימים. לכן:

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(w_n - v_n) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(w_n) - \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(v_n) \qquad \blacksquare$$

אבל בכל זאת יש בעייתיות מסויימת בהגדרה: אם ניקח שתי סדרות אחרות, יתכן ונקבל d-אינטגרל אחר. המשפט הבא פותר את הבעיה:

משפט 5.1 הגדרה 5.1 מוגדרת היטב.

הוכחה: תהאנה $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v'_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{w'_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות של פונקציות d-מדרגות, כך שמתקיימים התנאים:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \qquad v_n \le v_{n+1} \le f \le w_{n+1} \le w_n$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \qquad v'_n \le v'_{n+1} \le f \le w'_{n+1} \le w'_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(v_n) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(w_n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(v'_n) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(w'_n)$$

נגדיר שתי סדרות של פונקציות d-מדרגות חדשות (בזכות החלק הראשון של "המשפט המשעמם"):

$$V_n \triangleq \max\{v_n, v'_n\} \qquad W_n \triangleq \min\{w_n, w'_n\}$$

ולכן קיבלנו:

$$\begin{aligned} &\forall_{n\in\mathbb{N}} \qquad v_n \le V_n \le f \le W_n \le w_n \\ &\forall_{n\in\mathbb{N}} \qquad v'_n \le V_n \le f \le W_n \le w'_n \end{aligned}$$

על-פי החלק השני של "המשפט המשעמם":

$$\begin{aligned} &\forall_{n\in\mathbb{N}} \qquad \mathcal{I}_d(v_n) \le \mathcal{I}_d(V_n) \le \mathcal{I}_d(W_n) \le \mathcal{I}_d(w_n) \\ &\forall_{n\in\mathbb{N}} \qquad \mathcal{I}_d(v'_n) \le \mathcal{I}_d(V_n) \le \mathcal{I}_d(W_n) \le \mathcal{I}_d(w'_n) \end{aligned}$$

על-פי משפט הסנדוויץ' לסדרות נקבל כי:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(v_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(V_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(W_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(w_n) \\ \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(v'_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(V_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(W_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(w'_n) \end{aligned}$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(v_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(v'_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(w_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(w'_n) \quad \blacksquare$$

כעת כאשר ה-d-אינטגרל על $\mathbb{R}^d$ מוגדר, נוכל להוכיח מספר תכונות חשובות של ה-d-אינטגרל ושל הפונקציה ה-d-אינטגרבלית.

טענה 5.1 תהי f פונקצית d-מדרגות, אזי f היא d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}^d$ ומתקיים $\int_{\mathbb{R}^d} f = \mathcal{I}_d(f)$.

הוכחה: נגדיר $f \triangleq w_n \triangleq v_n$. הסדרות $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ הן קבועות ולכן מונוטוניות. בנוסף מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(v_n) = \mathcal{I}_d(f) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(w_n) \quad \blacksquare$$

למה 5.2 (d-אינטגרל על $\mathbb{R}^d$ הוא לינארי) תהאנה $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ פונקציות d-אינטגרבליות על $\mathbb{R}^d$, ויהי $k \in \mathbb{R}$, אזי $\int_{\mathbb{R}^d} (f+g) = \int_{\mathbb{R}^d} f + \int_{\mathbb{R}^d} g$ וגם $\int_{\mathbb{R}^d} (kf) = k \int_{\mathbb{R}^d} k \int_{\mathbb{R}^d} f$.

הוכחה: תהאנה $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות של פונקציות d-מדרגות המתאימות ל-f, ותהאנה $\{v'_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w'_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות של פונקציות d-מדרגות המתאימות ל-g. נגדיר

$$V_n \triangleq v_n + v'_n \quad W_n \triangleq w_n + w'_n$$

הסדרה $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה עולה, בעוד ש-$\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה יורדת. גם מתקיים $V_n \le f+g \le W_n$, וגבולות ה-d-אינטגרלים התינוקיים של הסדרות החדשות מקיימים:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(V_n) &= \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(v_n+v_n') = \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(v_n) + \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(v_n') = \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(w_n) + \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(w_n') \\ &= \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(w_n+w_n') = \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(W_n)\end{aligned}$$

כלומר $f+g$ היא d-אינטגרבלית וה-d-אינטגרל על $\mathbb{R}^d$ שלה הוא $\int_{\mathbb{R}^d} f + \int_{\mathbb{R}^d} g$.

אם $k=0$, אזי אין מה להוכיח כי $0f=0$, ו-0 היא פונקצית d-מדרגות, שה-d-אינטגרל על $\mathbb{R}^d$ שלה הוא 0. אם $k>0$, נגדיר $V_n \triangleq kv_n$ ו-$W_n \triangleq kw_n$, אחרת אם $k<0$, נגדיר $V_n \triangleq kw_n$ ו-$W_n \triangleq kv_n$. בשני המקרים נקבל:

$$V_n \le V_{n+1} \le kf \le W_{n+1} \le W_n$$

וגם:

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(V_n) = k\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(v_n) = k\lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(w_n) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{I}_d(W_n)$$

ולכן $\int_{\mathbb{R}^d} kf = k\int_{\mathbb{R}^d} f$. ∎

למה 5.3 פונקציה f d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}^d$ היא חסומה, וקיים d-קטע L כך ש- $f(\mathbb{R}^d \setminus L) = \{0\}$.

הוכחה: ניקח את האיבר הראשון בשתי סדרות הפונקציות, v_1, w_1, אשר שתיהן חסומות. $v_1 \le f \le w_1$, ולכן f חסומה. על-פי למה 3.3 קיימים שני d-קטעים חסומים, L_v, L_w, כך ש-v_1 מתאפסת מחוץ ל-L_v ו-w_1 מתאפסת מחוץ ל-w_1. יהא L d-קטע חסום המכיל את $L_v \cup L_w$. אזי v_1 וגם w_1 מתאפסות מחוץ ל-L, ולכן f מתאפסת מחוץ ל-L. ∎

לבסוף:

למה 5.4 אם $f,g:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ הן פונקציות d-אינטגרבליות, כך ש-$f \le g$, אזי $\int_{\mathbb{R}^d} f \le \int_{\mathbb{R}^d} g$.

הוכחה: תהא $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות d-מדרגות המתאימה ל-f, ותהא $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתאימה ל-g, אזי מתקיים $v_n \le f \le g \le w_n$ לכל n, ובפרט $\mathcal{I}_d(v_n) \le \mathcal{I}_d(w_n)$ לכל n, ולכן $\int_{\mathbb{R}^d} f \le \int_{\mathbb{R}^d} g$. ∎

כעת נוכיח שקילויות להגדרה 5.1:

למה 5.5 $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}^d$ אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיימות פונקציות d-מדרגות $v_\varepsilon, w_\varepsilon$ כך שמתקיים: $\mathcal{I}_d(w_\varepsilon - v_\varepsilon) < \epsilon$ וגם $v_\varepsilon \le f \le w_\varepsilon$.

הוכחה: נשתמש בלמה 5.1 כדי להוכיח את למה זו. תהא $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}^d$, ותהאנה $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות של פונקציות d-מדרגות מתאימות. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$\mathcal{I}_d(w_n - v_n) < \varepsilon$ לכל $n \ge N$, ובפרט עבור $n=N$, ולכן נגדיר $v_\varepsilon \triangleq v_N$ וגם $w_\varepsilon \triangleq w_N$.

כעת נניח כי f מקיימת את תנאי הלמה. לכל $k \in N$ קיימות פונקציות d-מדרגות $v_{\frac{1}{k}}, w_{\frac{1}{k}}$, כך ש-$v_{\frac{1}{k}} \le f \le w_{\frac{1}{k}}$, וגם $\mathcal{I}_d\left(w_{\frac{1}{k}} - v_{\frac{1}{k}}\right) < \frac{1}{k}$, ולכן:

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{I}_d\left(w_{\frac{1}{k}} - v_{\frac{1}{k}}\right) = 0$$

על-פי למה 5.1 נקבל:

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{I}_d\left(v_{\frac{1}{k}}\right) = \lim_{k\to\infty}\mathcal{I}_d\left(w_{\frac{1}{k}}\right)$$

וכעת נגדיר:

$$V_n \triangleq \max_{1\le k\le n} v_{\frac{1}{k}} \qquad W_n \triangleq \min_{1\le k\le n} w_{\frac{1}{k}}$$

שתי סדרות אלה מקיימות:

$$V_n \le V_{n+1} \le f \le W_{n+1}$$

$$\forall_{1\le k\le n} \qquad \mathcal{I}_d\left(v_{\frac{1}{k}}\right) \le \mathcal{I}_d(V_n) \le \mathcal{I}_d(W_n) \le \mathcal{I}_d\left(w_{\frac{1}{k}}\right)$$

ולכן על-פי משפט הסנדוויץ':
$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(V_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(W_n)$$

כלומר f היא d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}^d$ וה-d-אינטגרל שלה על $\mathbb{R}^d$ הוא הגבול הנ"ל. ■

למה 5.6 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}^d$ אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיימות $g_\varepsilon, h_\varepsilon$ פונקציות d-אינטגרבליות על $\mathbb{R}^d$ כך שמתקיים: $g_\varepsilon \le f \le h_\varepsilon$ וגם $\int_{\mathbb{R}^d}(h-g) < \epsilon$.

הוכחה: אם f היא d-אינטגרבלית, אזי לכל $\varepsilon > 0$ ניקח $g_\varepsilon = h_\varepsilon = f$, ונקבל $\int_{\mathbb{R}^d}(h_\varepsilon - g_\varepsilon) = 0 < \varepsilon$. [1]
כעת תהא f אשר מקיימת את תנאי הלמה ויהי $\varepsilon > 0$. קיימות שתי פונקציות g, h d-אינטגרבליות על $\mathbb{R}^d$ כך ש:

$$g \le f \le h \qquad \int_{\mathbb{R}^d}(h-g) < \frac{\varepsilon}{3}$$

על-פי הלמה הקודמת, קיימות פונקציות d-מדרגות v, w המתאימות ל-g, וקיימות פונקציות d-מדרגות V, W המתאימות ל-h כך ש:

$$v \le g \le w \qquad \mathcal{I}_d(w-v) = \int_{\mathbb{R}^d}(w-v) < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$V \le h \le W \qquad \mathcal{I}_d(W-V) = \int_{\mathbb{R}^d}(W-V) < \frac{\varepsilon}{3}$$

אנו נרצה שהפונקציות v, W, f יקיימו את תנאי למה 5.5 עבור ε. אבל:

$$v \le f \le W \qquad W-h \le W-V \qquad g-v \le w-v$$

ולבסוף:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_d(W-v) = \int_{\mathbb{R}^d}(W-v) &= \int_{\mathbb{R}^d}(W-h) + \int_{\mathbb{R}^d}(h-g) + \int_{\mathbb{R}^d}(g-v) \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d}(W-V) + \int_{\mathbb{R}^d}(h-g) + \int_{\mathbb{R}^d}(w-v) < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \blacksquare\end{aligned}$$

לבסוף נגדיר:

הגדרה 5.2 (**d-אינטגרבליות**) תהאנה $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^d$, ותהא $f : F \to \mathbb{R}^d$ פונקציה כלשהיא. f תיקרא **d-אינטגרבלית על E** אם הפונקציה $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ המוגדרת כך:

$$g(x) \triangleq \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

[1] אפשר היה גם לבחור פונקציות d-מדרגות על-פי הלמה הקודמת.

היא d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}^d$. ה-d-אינטגרל על E של f הוא: $\int_{\mathbb{R}^d} g \triangleq \int_E f$.
אם $d = 1$, ו-$E = [a, b)$ כאשר $a \leq b$, נהוג לסמן: $\int_{[a,b)} f \triangleq \int_a^b f \triangleq \int_a^b f(x)dx$. [2]
אם לכל $F \subseteq E$ f היא d-אינטגרבלית על E, נומר בקצרה כי f היא **d-אינטגרבלית**.

בשלב זה יש לנו את הכלים להוכיח כי ישנן פונקציות שהן d-אינטגרבליות.

5.1 דוגמאות לבדיקת d-אינטגרבליות

בסעיף זה נדגים שיטה לבדיקה של d-אינטגרביליות של מספר פונקציות. כדי להבין טוב יותר את מהלך החישובים, אני ממליץ לצייר.

טענה 5.2 $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

הוכחה: נוכיח זאת על-ידי בניה של הסדרות $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$. בכל שלב n, נפרק את $[0, 1)$ ל-2^n d-קטעים חסומים:

$$\begin{aligned}
\forall_{0\leq i\leq 2^n} \qquad & \alpha_{i,n} \triangleq \frac{i}{2^n} \\
\forall_{0\leq i< 2^n} \qquad & I_{i,n} \triangleq [\alpha_{i,n}, \alpha_{i+1,n}) = \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right)
\end{aligned}$$

נשים לב כי מתקיים: $\alpha_{i,n} = \alpha_{2i,n+1} < \alpha_{2i+1,n+1}$, ולכן $I_{i,n}$ ניתן לפירוק זר: $I_{2i,n+1} \cup I_{2i+1,n+1}$. כעת נגדיר את הסקלרים:

$$\lambda_{i,n} \triangleq \alpha_{i,n}^2 = \frac{i^2}{2^{2n}}$$

נשים לב כי $\lambda_{i,n}$ מקיימים:

$$\begin{aligned}
\lambda_{i,n} &= \inf f(I_{i,n}) = \min f(I_{i,n}) \\
\lambda_{i+1,n} &= \sup f(I_{i,n}) \\
\lambda_{i,n} &= \lambda_{2i,n+1} < \lambda_{2i+1,n+1} < \lambda_{2i+2,n+1} = \lambda_{i+1,n}
\end{aligned}$$

תכונות אלה יאפשרו להגדיר את v_n, w_n:

$$\begin{aligned}
v_n &\triangleq \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{i,n}\chi_{I_{i,n}} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{i^2}{2^{2n}}\chi_{I_{i,n}} \\
w_n &\triangleq \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{i+1,n}\chi_{I_{i,n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{(i+1)^2}{2^{2n}}\chi_{I_{i,n}}
\end{aligned}$$

[2]אין כל משמעות ל-x ב-$\int_a^b f(x)dx$, אם תכתבו t במקום x המשמעות תהא זהה.

פונקציות אלה הן פונקציות d-מדרגות המקיימות: $v_n \leq v_{n+1} \leq f \leq w_{n+1} \leq w_n$. כעת נחשב את האינטגרלים התינוקיים:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_d(v_n) &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{i,n}|I_{i,n}| = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{i^2}{2^{2n}}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{3n}}\sum_{i=0}^{2^n-1} i^2 = \frac{1}{2^{3n}}\left(\frac{1}{3}2^{3n} - 2^{2n-1} + \frac{1}{6}2^n\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}} \\
\mathcal{I}_d(w_n) &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{i+1,n}|_{i,n}| = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{(i+1)^2}{2^{2n}}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{3n}}\sum_{i=0}^{2^n-1}(i+1)^2 = \frac{1}{2^{3n}}\sum_{i=1}^{2^n} i^2 = \\
&= \frac{1}{2^{3n}}\left(\frac{1}{3}2^{3n} + 2^{2n-1} + \frac{1}{6}2^n\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}}
\end{aligned}$$

ולבסוף:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(v_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}}\right) = \frac{1}{3} \\
\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(w_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3\cdot 2^{2n+1}}\right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

ולכן $\int_0^1 (x \mapsto x^2) = \frac{1}{3}$.[3] ■

בהמשך יופיע המשפט היסודי של החדו"א שיגאל אותנו מחישובים מסורבלים כגון הנ"ל. דוגמא נוספת באותו סגנון:

טענה 5.3 תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה **מונוטונית וחסומה** בקטע $[a,b)$, וגם $f(x) = 0$ לכל x לא בקטע, אזי f היא d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}$ (וגם על כל d-קטע ב-$[a,b)$).

הוכחה: בה"כ f מונוטונית עולה ב-$[a,b)$. נגדיר:

$$\begin{aligned}
&\forall_{0\leq i\leq 2^n} && \alpha_{i,n} \triangleq a + \frac{i}{2^n}(b-a) \\
&\forall_{0\leq i< 2^n} && I_{i,n} \triangleq [a_{i,n}, a_{i+1,n}) = \left[a + \frac{i}{2^n}(b-a), a + \frac{i+1}{2^n}(b-a)\right) \\
&\forall_{0\leq i< 2^n} && \lambda_{i,n} \triangleq \inf f(I_{i,n}) \\
&\forall_{0\leq i< 2^n} && \mu_{i,n} \triangleq \sup f(I_{i,n})
\end{aligned}$$

$\lambda_{i,n}, \mu_{i,n}$ הם סופיים, מפני ש-f חסומה בגלל המונוטוניות של f, נקבל כי: $\lambda_{i,n} \leq \lambda_{i+1,n}$, $\mu_{i,n} \leq \mu_{i+1,n}$, $\lambda_{i,n} \leq \mu_{i,n}$, וגם:

$$\begin{aligned}
\lambda_{i,n} &= \lambda_{2i,n+1} \leq \lambda_{2i+1,n+1} \\
\mu_{i,n} &= \mu_{2i+1,n+1} \geq \mu_{2i,n+1}
\end{aligned}$$

[3] הסימון $x \mapsto f(x)$ זהה ל-f.

לבסוף, בגלל המונוטוניות של f, נקבל כי $\mu_{i-1,n} \le \lambda_{i,n}$ לכל $0 < i < 2^n - 1$. לכן נוכל להגדיר את שתי סדרות פונקציות ה-d-מדרגות:

$$v_n \triangleq \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_{i,n}\chi_{I_{i,n}}$$
$$w_n \triangleq \sum_{i=0}^{2^n-1} \mu_{i,n}\chi_{I_{i,n}}$$

שתי הסדרות מקיימות: $v_n \le v_{n+1} \le f \le w_{n+1} \le w_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$. כעת נבדוק מהו האינטגרל התינוקי של הפרשן:

$$\mathcal{I}_d(w_n - v_n) = \sum_{i=0}^{2n-1} (\mu_{i,n} - \lambda_{i,n})|I_{i,n}| = \frac{b-a}{2^n}\sum_{i=0}^{2^n-1}(\sup f(I_{i,n}) - \inf f(I_{i,n}))$$

היינו רוצים להתפתר מן הסכום, כלומר לחסום אותו על-ידי מספר שלא יהיה תלוי ב-n. נשים לב כי מתקיים $\sup f(I_{i,n}) \le \inf f(I_{i+1,n})$ לכל $0 \le i \le 2^n - 2$, ולכן נוכל לעשות שינוי קטן:

$$= \frac{b-a}{2^n}\left((\sup f(I_{2^n-1,n}) - \inf f(I_{2^n-1,n})) - \sum_{i=0}^{2^n-2}(\sup f(I_{i,n}) - \inf f(I_{i,n}))\right)$$
$$\le \frac{b-a}{2^n}\left((\sup f(I_{2^n-1,n}) - \inf f(I_{2^n-1,n})) - \sum_{i=0}^{2^n-2}(\inf f(I_{i+1,n}) - \inf f(I_{i,n}))\right)$$

קיבלנו טור טלסקופי, וזה מה שנשאר:

$$= \frac{b-a}{2^n}(\sup f(I_{2^n-1,n}) - \inf f(I_{0,n}))$$

אבל f מונוטונית, ולכן ה-$\inf$ בקטע הראשון הוא ה-$\inf$ בכל $[a,b)$, וה-$\sup$ בקטע האחרון הוא ה-$\sup$ בכל $[a,b)$:

$$= \frac{b-a}{2^n}(\sup f([a,b)) - \inf f([a,b)))$$

ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_d(w_n - v_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n}(\sup f([a,b)) - \inf f([a,b))) = 0$$

כלומר f d-אינטגבילית על $\mathbb{R}$. ■

בשיטה דומה מוכיחים כי אם f היא d-מונוטונית (כלומר f היא מונוטונית אם קובעים $d-1$ משתנים), אזי גם f היא d-אינטגרבילית על $\mathbb{R}^d$.

פרק 6

המשפט היסודי של האינפי

פרק זה יעסוק במשפט הבאה:

משפט 6.1 (**המשפט היסודי של האינפי, ע״ש Newton & Leibniz**) תהי $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ 1-אינטגרבילית על $[a,b)$, וקיימת פונקציה $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ב-$[a,b]$, וגזירה ב-(a,b) כאשר $F'(x) = f(x)$ לכל $a < x < b$. אזי

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$, אזי קיימות שתי פונקציות d-מדרגות $v_n = \sum_{i=0}^m \alpha_i \chi_{I_i}$ ו-$w_n = \sum_{j=0}^n \beta_i \chi_{J_j}$, על-פי למה 5.5, המקיימות:

$$v_n \le f \le w_n \qquad \mathcal{I}_d(w_n - v_n) < \varepsilon$$

בלי הגבלות הכלליות אנו יכולים להניח כי:

- v_n, w_n מתאפסות מחוץ ל-$[a,b)$, כי גם $v_n \chi_{[a,b)}, w_n \chi_{[a,b)}$ הן פונקציות d-מדרגות שיכולות להחליף את v_n, w_n;
- הקטעים המגדירים את v_n, w_n זרים וחסומים: זאת כי אנו יכולים לוותר על הקטעים הלא-חסומים. כלומר $\bigcup_{i=0}^m I_i = \bigcup_{j=0}^n J_j = [a,b)$.
- לכל $0 \le i < m$, מתקיים $\sup I_i = \min I_{i+1}$, ולכל $0 \le j < n$ מתקיים $\sup J_j = \min J_{j+1}$.[1] כאן אנו רוצים (לשם נוחות) שהקטעים יהיו מסודרים אחד אחרי השני, וזה אפשרי כי ניתן להחליף את הסדר בסכום.

לאור הדרישה האחרונה, נגדיר $t_i \triangleq \min I_i$, ו-$t_{m+1} \triangleq b$, ולכן נקבל $t_i < t_{i+1}$. באותו אופן, נגדיר $s_i \triangleq \min J_j$, ו-$s_{n+1} \triangleq b$, ולכן נקבל $s_i < s_{i+1}$. נשים לב כי בקטעים הסגורים $[t_i, t_{i+1}]$ ו-$[s_j, s_{j+1}]$ הפונקציה F רציפה, וגזירה בפנים של הקטעים, ולכן על-פי משפט Lagrange קיימים $\alpha'_i \in (t_i, t_{i+1})$ ו-$\beta'_j \in (s_j, s_{j+1})$, כך שמתקיים:

$$f(\alpha'_i) = F'(\alpha'_i) = \frac{F(t_{i+1}) - F(t)}{t_{i+1} - t_i}$$
$$f(\beta'_j) = F'(\beta'_j) = \frac{F(s_{j+1}) - F(s)}{s_{j+1} - s_j}$$

[1] ב-1-קטע חסום ה-inf שייך לו, ולכן הוא ה-min.

אבל $v_n(\alpha_i') = \alpha_i$, ולכן $\alpha_i \le f(\alpha_i')$, ובאותו אופן נקבל כי $f(\beta_j') \le \beta_j$. כאן נחשב:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{m}(F(t_{i+1}) - F(t_i)) = \sum_{i=0}^{m} f(\alpha_i')(t_{i+1} - t_i) \ge \sum_{i=0}^{m} \alpha_i |I_i| = \mathcal{I}_d(v_n)$$

באותו אופן:

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=0}^{n}(F(s_{j+1}) - F(s_j)) = \sum_{j=0}^{n} f(\beta_j')(s_{j+1} - s_i) \le \sum_{j=0}^{m} \beta_j |J_j| = \mathcal{I}_d(w_n)$$

ולכן קיבלנו כי $F(b) - F(a) \in [\mathcal{I}_d(v_n), \mathcal{I}_d(w_n)]$, כלומר $\left|F(b) - F(a) - \int_a^b f\right| < \varepsilon$. התוצאה האחרונה נכונה לכל $\varepsilon > 0$, ולכן $F(b) - F(a) - \int_a^b f = 0$. ■

משפט זה מקשר בין החומר המאוד התאורטי לבין המושג "אינטגרל מסויים".

פרק 7

סדרות של פונקציות

פרק זה יעסוק בסדרות של פונקציות, והקשר שלהן לאינטגרביליות. אנו כבר ראינו סדרות של פונקציות כאשר הגדרנו אינטגרביליות, אבל לא עסקנו בהתכנסות של סדרות אלה.

הגדרה 7.1 (**התכנסות נקודתית של סדרת פונקציות**) תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מ-$\mathbb{R}^d$ ל-$\mathbb{R}$, ותהא $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $x\in E$:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

נומר כי הסדרה **מתכנסת נקודתית ל-** f. כלומר:

$$\forall_{\varepsilon>0}\forall_{x\in\mathbb{R}^d}\exists_{N_{\varepsilon,x}\in\mathbb{N}}\forall_{\mathbb{N}\ni n>N}\qquad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

נשאלת השאלה: האם מתקיים $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n=\int_E f$**? מתברר שלא בהכרח:**

דוגמא 7.1 תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, המוגדרות כך: $f_n(x)\triangleq n^n\chi_{[n,n+1)}$. פונקציות אלה הן 1-אינטגרביליות על $\mathbb{R}$, אבל $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n=\lim_{n\to\infty}n^n=\infty$. לעומת זאת הסדרה מתכנסת נקודתית ל-0: לכל $\varepsilon>0$ ולכל $x>0$, נבחר $N_x\triangleq\lfloor x\rfloor$, ונקבל כי $f_n(x)=0$ לכל $n>N$.

מתברר כי עבור סדרות מסויימות, שהמתנהגות "יפה", כן מקיימות: $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n=\int_E f$.

הגדרה 7.2 (**התכנסות במידה שווה**) תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מ-$\mathbb{R}^d$ ל-$\mathbb{R}$, ותהא $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$. נומר כי הסדרה **מתכנסת נקודתית במידה שווה ל-** f אם מתקיים:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}\forall_{x\in\mathbb{R}^d}\forall_{\mathbb{N}\ni n>N}\qquad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

יש לשים לב להבדל הקטן בין התכנסות רגילה לבין התכנסות במ"ש של סדרת פונקציות: בהתכנסות רגילה ה-N תלוי גם ב-x וגם ב-ε, לעומת זאת בהתכנסות במ"ש ה-N תלוי רק ב-ε[1]. תכונה שימושית של התכנסות במ"ש היא:

[1] תזכורת על רציפות של פונקציות: ברציפות במ"ש ה-δ תלוי אך ורק ב-ε, בעוד שברציפות רגיה ה-δ תלוי גם ב-ε וגם בנקודה בה נבדקת הרציפות.

טענה 7.1 תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ המתכנסות נקודתית ל-$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. אזי ההתכנסות היא במ"ש אם ורק אם מתקיים $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

הוכחה: נניח תחילה כי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל-f. יהא $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים לכל $n > N$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $x \in \mathbb{R}^d$, כלומר $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. כעת נניח כי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ו-f מקיימים את תנאי הטענה. יהא $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ לכל $n > N$, ולכן בפרט מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in \mathbb{R}^d$. ■

טענה 7.2 תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ המתכנסות נקודתית ל-$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. אזי ההתכנסות היא במ"ש אם ורק אם קיימת סדרה של מספרים אי-שליליים $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל-0 ומקיים: $|f_n(x) - f(x)| \le \alpha_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \mathbb{R}^d$.

הוכחה: נניח תחילה כי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל-f. נבחר $\alpha_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$ וסיימנו על-פי הטענה הקודמת. כעת נניח כי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, f ו-$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ כלשהי מקיימים את תנאי הטענה. לכן $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \le \alpha_n$, ולכן על-פי משפט הסנדוויץ' נקבל כי $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$ מתכנסת ל-0. ■

ולבסוף:

משפט 7.1 תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ פונקציות d-אינטגרבליות על $\mathbb{R}^d$, כך שכולן מתאפסות מחוץ ל-d-קטע $I \subseteq \mathbb{R}^d$ משט, וגם היא מתכנסת במידה שווה ל-f, אזי f היא d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}^d$, ומתקיים $\int_{\mathbb{R}^d} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n$.

הוכחה: על-פי טענה 7.1, הסדרה $\alpha_n \triangleq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)|$ שואפת ל-0. בנוסף נקבל כי $f(x) = 0$ לכל $x \notin I$. נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$f_n - \alpha_n\chi_I \le f \le f_n + \alpha_n$$

אבל $h_n \triangleq f_n + \alpha_n\chi_I$ ו-$g_n \triangleq f_n - \alpha_n\chi_I$ הן פונקציות d-אינטגרבליות על $\mathbb{R}^d$, ומתקיים:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (h_n - g_n) = 2\alpha_n |I|_d$$

כעת, יהא $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$2\alpha_N |I|_d < \varepsilon$, ולכן h_N, g_N מקיימות $g_N \le f \le h_N$ וגם $\int_{\mathbb{R}^d} (h_n - g_n) < \varepsilon$, ולכן f d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}$. כדי להשלים את המשפט נשתמש בלמה 5.4, ונקבל לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f - \alpha_n\chi_I) \le \int_{\mathbb{R}^d} f_n \le \int_{\mathbb{R}^d} (f + \alpha_n\chi_I)$$

ולכן על-פי משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n = \int_{\mathbb{R}^d} f \quad ■$$

לפני שאנו מוכיחים כי כל הפונקציות הרציפות הן d-אינטגרביליות, אנו זקוקים להכנה נוספת.

פרק 8

מידת Jordan

בפרק זה נעסוק במדידת "נפח" של קבוצות מסויימות.

הגדרה 8.1 (**מידת Jordan**) תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$. E תיקרא **מדידה ע"פ *Jordan*** או d-**מדידה** אם χ_E היא d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}^d$, ונסמן:

$$|E| \triangleq |E|_d \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E$$

ברור כי d-קטע ורב-d-קטע הם מדידים ע"פ Jordan. כלומר קבוצות d-מדידה הן מעין הכללה נוספת של d-קטעים ורב-d-קטעים.

טענה 8.1 תהא $\{E_i\}_{i=1}^n$ משפחה זרה סופית של קבוצות מדידות ע"פ *Jordan* ב-$\mathbb{R}^d$, אזי איחודם גם d-מדיד, ומקיים:

$$\left|\bigcup_{i=1}^n E_i\right| = \sum_{i=1}^n |E_i|$$

הוכחה: נסמן: $E \triangleq \bigcup_{i=1}^n E_i$. היות והמשפחה היא זרה, נקבל:

$$\chi_E = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}$$

אבל χ_E d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}^d$, ולכן:

$$|E| = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^n |E_i| \quad \blacksquare$$

טענה 8.2 אם $E, F \subseteq \mathbb{R}^d$ d-מדידות, אזי גם $E \cap F$, $E \cup F$ ו-$E \setminus F$ d-מדידות.

הוכחה: $E \cap F$ d-מדידה כי $\chi_{E\cap F} = \chi_E \cdot \chi_F$. $E \setminus F$ d-מדידה כי $\chi_{E\setminus F} = \chi_E(1-\chi_F)$ d-אינטגרבילית, ו-$E \cup F$ d-מדידה כי $E \cup F$ הוא איחוד זר של $E \cap F$, $E \setminus F$ ו-$F \setminus E$. $\blacksquare$

קיים איפיון נוסף למדידות ע"פ Jordan:

משפט 8.1 $E \subseteq \mathbb{R}^d$ היא קבוצה d-מדידה אמ"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיימים רב-d-קטעים G, H כך שמתקיים $G \subseteq E \subseteq H$ וגם $|H|_d < |G|_d + \varepsilon$.

הוכחה: נניח כי E d-מדידה, ויהי $\varepsilon > 0$. קיימות שתי פונקציות d-מדרגות $g, h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ כך שמתקיים: $\mathcal{I}_d(h-g) < \varepsilon$ וגם $g \leq \chi_E \leq h$. נסמן:

$$g = \sum_{i=0}^{m} g_i \chi_{I_i} \qquad\qquad h = \sum_{j=0}^{n} h_j \chi_{J_j}$$

כאשר $\{I_i\}_{i=1}^m$ ו-$\{J_j\}_{j=1}^n$ הן משפחות של d-קטעים זרים וחסומים. אנו נתקן את g, h כך שהן יהיו פונקציות מאפיינות. נגדיר:

$$g_i^* \triangleq \chi_{(0,\infty)}(g_i) = \begin{cases} 1 & g_i > 0 \\ 0 & g_i \leq 0 \end{cases} \qquad\qquad h_i^* \triangleq \chi_{[1,\infty)}(h_i) = \begin{cases} 1 & h_j \geq 1 \\ 0 & h_j < 1 \end{cases}$$

$$g^* = \sum_{i=0}^{m} g_i^* \chi_{I_i} \qquad\qquad h^* = \sum_{j=0}^{n} h_j^* \chi_{J_j}$$

הפונקציות החדשות הן פונקציות d-מדרגות המקיימות: $g \leq g^* \leq \chi_E \leq h^* \leq h$, ולכן גם:

$$\mathcal{I}_d(h^* - g^*) \leq \mathcal{I}_d(h-g) < \varepsilon$$

אבל g^*, h^* הן לא סתם פונקציות d-מדרגות: התמונות שלהן הן $\{0,1\}$, ולכן g^*, h^* הן פונקציות מציינות של הקבוצות $G = \bigcup_{i=1}^m I_i$ ו-$H = \bigcup_{j=1}^n J_j$ ומתקיים $G \subseteq E \subseteq H$.
כעת נניח כי E מקיימת את תנאי המשפט, ולכן לכל $\varepsilon > 0$, קיימות פונקציות d-מדרגות χ_G, χ_H כך שמתקיים $\chi_G \leq \chi_E \leq \chi_H$ וגם $\mathcal{I}_d(\chi_G - \chi_H) < \varepsilon$, כלומר χ_E d-אינטגרבלית, ולכן E d-מדידה. ■
בזכות המשפט, אנו יכולים להוכיח את הלמה הבאה:

למה 8.1 תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה d-מדידה, ותהא $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ d-אינטגרבילית על $\mathbb{R}^d$, אזי f היא d-אינטגרבילית על E (או: $f\chi_E$ היא d-אינטגרבילית על $\mathbb{R}^d$).

הוכחה: לכל $\varepsilon > 0$, קיימות פונקציות d-מדרגות v, w כך ש-$v \leq f \leq w$ וגם $\mathcal{I}_d(w-v) < \frac{\varepsilon}{2}$, וגם קיימים רב-$d$-קטעים G, H כך ש-$G \subseteq E \subseteq H$ ו-$|H|_d - |G|_d < \frac{\varepsilon}{2}$. גם הפונקציות $v\chi_G$ ו-$w\chi_H$ הן פונקציות d-מדרגות, ומתקיים:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_d(w\chi_H - v\chi_G) &= \mathcal{I}_d(w\chi_H - v\chi_H) + \mathcal{I}_d(v\chi_H - v\chi_G) = \mathcal{I}_d(\chi_H(w-v)) + \mathcal{I}_d(v(\chi_H - \chi_G)) \\ &\leq \mathcal{I}_d(w-v) + |H|_d - |G|_d < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

ברור כי $v\chi_G \leq f\chi_E \leq w\chi_G$, ולכן $f\chi_E$ היא d-אינטגרבילית על $\mathbb{R}^d$, ומכאן ש-f היא d-אינטגרבילית על E. ■
למה זו מאפשרת להוכיח תכונות חשובות נוספות של קבוצות d-מדידות:

משפט 8.2 יהיו $E, F \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה d-מדידות, אזי $E \cap F$, $E \setminus F$ ו-$E \cup F$ הן d-מדידות.

הוכחה: $F\cap E$ d-מדיד, אזי $\chi_E\chi_F$ היא d-אינטגרבילית, ולכן $F\cap E$ d-מדידה.
$\int_{\mathbb{R}^d}\chi_F\chi_E=\int_E\chi_F$, בפרט $1-\chi_F$ היא d-אינטגרבילית על E, ולכן $\chi_E(1-\chi_F)$ d-אינגרבילית על $\mathbb{R}^d$, ולכן $E\setminus F$ d-מדידה.
$E\cup F$ d-מדיד כאיחוד זר של $E\cap F$, של $E\setminus F$ ושל $F\setminus E$. ■

לבסוף, נוכיח מספר למות חשובות ומשפט שיאפשרו לנו לחשב את ה-d-אורכים של קבוצות d-מדידות מיוחדות. ישנם קבוצות $(d+1)$-מדידות שחישוב $(d+1)$-אורכם הוא חישוב של d-אינטגרל, במקום $(d+1)$-אינטגרל.

למה 8.2 תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ קבוצה d-מדידה, ויהא $[\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{R}$ 1-קטע חסום, אזי $E\times[\alpha,\beta)$ היא $(d+1)$-מדידה, ומתקיים $|E\times[\alpha,\beta)|_{d+1}=(\beta-\alpha)|E|_d$.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$, אזי קיימים רב-d-קטעים G,H כך שמתקיים $G\subseteq E\subseteq H$ וגם

$$|G|_d-|H|_d<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$$

גם $G\times[\alpha,\beta)$ ו-$H\times[\alpha,\beta)$ הם רב-$(d+1)$-קטעים, ובפרט:

$$G\times[\alpha,\beta)\subseteq E\times[\alpha,\beta)\subseteq H\times[\alpha,\beta)$$
$$|H\times[\alpha,\beta)|_{d+1}-|G\times[\alpha,\beta)|_{d+1}=(\beta-\alpha)\left(|H|_d-|G|_d\right)<(\beta-\alpha)\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}=\varepsilon$$

כלומר $E\times[\alpha,\beta)$ גם d-מדידה, ומתקיים: $|E\times[\alpha,\beta)|_{d+1}=(\beta-\alpha)|E|_d$. ■

למה 8.3 תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ קבוצה d-מדידה. יהא $c\in\mathbb{R}$, ותהא $w:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ פונקצית d-מדרגות כך ש-$c\leq w(x)$ לכל $x\in E$, אזי הקבוצה:

$$W\triangleq\{(x,y)\in\mathbb{R}|x\in E\wedge c\leq x<w(x)\}=\bigcup_{x\in E}\{x\}\times[c,w(x))$$

היא $(d+1)$-מדידה, ומקיימת: $|W|_{d+1}=\int_E(w-c)$.

הוכחה: יהיו $\{I_i\}_{i=1}^n$ ה-d-קטעים החסומים המגדירים את w, ויהיו $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ הערכים המתאימים. הקבוצה W היא למעשה האיחוד הזר הבא:

$$W=\bigcup_{i=1}^n(E\cap I_i)\times[c,\lambda_i)$$

הקבוצה $E\cap I_i$ היא d-מדידה, ולכן גם $(E\cap I_i)\times[c,\lambda_i)$ $(d+1)$-מדידה, ולכן גם הקבוצה W $(d+1)$-מדידה.

$$\begin{aligned}|W|_{d+1}&=\sum_{i=1}^n|E\cap I_i|_d(\lambda_i-c)=\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^d}(\lambda_i-c)\chi_{E\cap I_i}=\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^n(\lambda_i-c)\chi_{E\cap I_i}\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\chi_E\sum_{i=1}^n(\lambda_i-c)\chi_{I_i}=\int_E(w-c)\quad\blacksquare\end{aligned}$$

למה 8.4 תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה d-מדידה. יהא $c \in \mathbb{R}$, ותהא $\psi : E \to \mathbb{R}$ פונקציה d-אינטגרבילית ב-E כך ש-$c \le \psi$, אזי הקבוצה:

$$P \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R} | x \in E \wedge c \le y < \psi(x)\} = \bigcup_{x \in E} \{x\} \times [c, \psi(x))$$

היא $(d+1)$-מדידה, ומקיימת: $|P|_{d+1} = \int_E (\psi - c)$.

הוכחה: **יהי** $\varepsilon > 0$, **יהיו** v, w **פונקציות** d**-מדרגות כך ש-**$v \le \psi \le w$ **ב-**E **ו-**$\mathcal{I}_d(w - v) < \varepsilon$. **נגדיר:**

$$V \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R} | x \in E \wedge c \le x < v(x)\}$$
$$W \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R} | x \in E \wedge c \le x < w(x)\}$$

ברור כי מתקיים $V \subseteq P \subseteq W$, **וגם** V, W d**-מדידות.**

$$|W|_{d+1} - |V|_{d+1} = \int_E ((w-c) - (v-c)) = \int_E (w - v) \le \int_{\mathbb{R}^d} (w - v) < \varepsilon$$

כלומר P **היא** $(d+1)$**-מדידה, ומקיימת:** $|V|_{d+1} \le |P|_{d+1} \le |W|_{d+1}$. **מצד שני** $v \le \psi \le w$, **ולכן שני המספרים** $\int_E (\psi - c)$ **ו-**$|P|_{d+1}$ **נמצאים בין** $|V|_{d+1}$ **ולבין** $|W|_{d+1}$, **ולכן** $|P|_{d+1} = \int_E (\psi - c)$. ■

משפט 8.3 תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה d-מדידה, ויהיו $\varphi, \psi : E \to \mathbb{R}$ פונקציות d-אינטגרביליות ב-E כך ש-$\varphi \le \psi$, אזי הקבוצה:

$$W \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R} | x \in E \wedge \varphi(x) \le y < \psi(x)\} = \bigcup_{x \in E} \{x\} \times [\varphi(x), \psi(x))$$

היא $(d+1)$-מדידה, ומקיימת: $|W|_{d+1} = \int_E (\psi - \varphi)$.

הוכחה: **היות ו-**φ d**-אינטגרבילית ב-**E, **קיים** $c \in \mathbb{R}$ **כך ש-**$c \le \varphi$. **נגדיר:**

$$A \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R} | x \in E \wedge c \le y < \varphi(x)\}$$
$$B \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R} | x \in E \wedge c \le y < \psi(x)\}$$

שתי הקבוצות $(d+1)$**-מדידות, ומקיימות** $W = A \setminus B$, **ולכן:**

$$|W|_{d+1} = |B|_{d+1} - |A|_{d+1} = \int_E (\psi - c) - \int_E (\varphi - c) = \int_E (\psi - \varphi) \quad ■$$

המשפט האחרון יהא גם נכון כאשר נחליש או נחזק בהתאמה את האי-שיוויונים על y. בנוסף משפט זה יהא הצעד הראשון בחקירת פונקציות שניתן לחשב את האינטגרל שלהן על-ידי אינטגרל נשנה.

פרק 9

טופולוגיה, רציפות ואינטגרלים

אני ממליץ בחום לעיין בפרק 2 של הספר "Measure, Topoly, and Fractal Geometry", מאת Gerald A. Edgar.
נתחיל בסקירה קצרה של מושגים וטענות בטופולוגיה:

משפט 9.1 הפונקציה $\mathrm{d}(x,y):\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to[0,\infty)$ המוגדרת כך:

$$\mathrm{d}(x,y)\triangleq\sqrt{\sum_{i=0}^{d}(y_i-x_i)^2}$$

היא **מטריקה** ב-$\mathbb{R}^d$, כלומר היא מקיימת: לכל $x,y,z\in\mathbb{R}^d$

חיוביות מוחלטת: $\mathrm{d}(x,y)=0$ אם"ם $x=y$;

סימטריות: $\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x)$;

אי-שיוויון המשולש: $\mathrm{d}(x,z)\leq\mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)$.

$\mathbb{R}^d$ יחד עם d נקראים מרחב מטרי.

הערה: יש להבדיל מפונקציה המרחק d לבין מספר המימדים d.
נשים לב כי אם $X\subseteq\mathbb{R}^d$, אזי d המצומצמת ל-$X\times X$ גם מטריקה, ולכן (X,d) מרחב מטרי בזכות עצמו. עובדה זו יכולה ליצור מצבים מוזרים ומשונים, אבל זה כבר לא שייך לאינפי...
כאשר $d=1$, נקבל כי $\mathrm{d}(x,y)=|x-y|$.

הגדרה 9.1 (נקודה פנימית, קבוצה פתוחה) תהי $A\subseteq\mathbb{R}^d$, ויהא $x\in A$. x יקרא **נקודה פנימית של** A אם קיים $\delta>0$ כך שאם $\mathrm{d}(x,y)<\delta$, אזי $y\in A$. אם כל $x\in A$ הוא נקודה פנימית של A, אזי A תקרה קבוצה פתוחה.

הגדרה 9.2 (נקודת הצטברות, קבוצה סגורה) תהי $A\subseteq\mathbb{R}^d$, ויהא $x\in\mathbb{R}^d$ (לא בהכרח ב-A). x יקרא **נקודת הצטברות של** A אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $y\in A$ כך ש-$0<\mathrm{d}(x,y)<\varepsilon$. אם כל נקודות ההצטברות של A שייכות לה, אזי A תיקרא **קבוצה סגורה**

טענה 9.1 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$. A פתוחה אם"ם $\mathbb{R}^d \setminus A$ סגורה.

הגדרה 9.3 (**קוטר**) תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$. **הקוטר של** A הוא: $\operatorname{diam}(A) \triangleq \sup\limits_{x,y \in A} \mathrm{d}(x,y)$.

הגדרה 9.4 (**קבוצה חסומה**) תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$. A תיקרא **קבוצה חסומה** אם קיים d-קטע I חסום כך ש-$I \subseteq A$.

טענה 9.2 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^d$. $\operatorname{diam}(A) < \infty$ אם"ם A חסומה.

משפט 9.2 תהי $F \subseteq \mathbb{R}^d$. F סגורה וחסומה אם"ם F **קומפקטית**.

מבחינתנו המשפט האחרון הוא בגדר הגדרה בלבד.

הגדרה 9.5 (**פונקציה רציפה**) תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$, תהא $f : E \to \mathbb{R}$, ויהא $x \in E$. נאמר ש-f **רציפה ב-**x (**ביחס ל-**E) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta_{\varepsilon,x} > 0$ כך שלכל $y \in E$ מתקיים:

$$\mathrm{d}(x,y) < \delta_{\varepsilon,x} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

נאמר ש-f **רציפה בכל** E (**ביחס ל-**E) אם היא רציפה בכל $x \in E$ (ביחס ל-E).

הגדרה 9.6 (**פונקציה רציפה במידה שווה**) תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ותהא $f : E \to \mathbb{R}$. נאמר ש-f **פונקציה רציפה במידה-שווה** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta_\varepsilon > 0$ כך שלכל $y \in E$ מתקיים:

$$\mathrm{d}(x,y) < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

משפט 9.3 כל פונקציה רציפה בקבוצה קומפקטית היא פונקציה רציפה במ"ש.

את המשפט האחרון הוכחנו באינפי 1 עבור המקרה של $d = 1$. פרק זה מוקדש למעשה למשפט הבא:

משפט 9.4 תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה d-מדידה, ותהא $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ המתאפסת מחוץ ל-E ורציפה במ"ש ב-E, אזי:

(i) f d-אינטגרבלית על $\mathbb{R}^d$;

(ii) קיימות שתי סדרות $(v_m)_{n=1}^\infty$, $(w_m)_{n=1}^\infty$ של פונקציות d-מדרגות אשר מתאפסות כולן מחוץ ל-d-קטע I (משותף) המכיל את E וגם:

$$v_m \le v_{m+1} \le w_{m+1} \le w_m \tag{9.1}$$

$$0 \le w_m - v_n \le \frac{1}{m} \tag{9.2}$$

$$v_m \chi_E \le f \le w_m \chi_E \tag{9.3}$$

ובפרט הסדרה $(v_m \chi_E)_{m=1}^\infty$ מתכנסת במ"ש ל-f.

הוכחה: נסמן: $M \triangleq |E|_d = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E$, ויהי $\varepsilon > 0$. קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in E$:

$$\mathrm{d}(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

מכיוון ש-E חסומה, קיים d-קטע חסום I, כך ש-$E \subseteq I$. נחלק את I ל-d-קטעים קטנים זרים זה לזה כך שהקוטר של כל אחד מהם לא יהיה קטן מ-δ - $\{I_n\}_{n=1}^N$. נגדיר:

$$\alpha_n \triangleq \begin{cases} \inf f(I_n \cap E) & I_n \cap E \neq \emptyset \\ 0 & I_n \cap E = \emptyset \end{cases} \qquad \beta_n \triangleq \begin{cases} \sup f(I_n \cap E) & I_n \cap E \neq \emptyset \\ 0 & I_n \cap E = \emptyset \end{cases}$$

בגלל הרציפות במ"ש של f α_n, β_n סופיים. בנוסף היות ו-$\mathrm{diam}(I_n \cap E) < \delta$, נקבל:

$$\forall_{x,y \in E \cap I_n} \qquad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

אבל $f(x) \leq \beta_n$ וגם $f(y) \geq \alpha_n$, ולכן:

$$|\beta_n - \alpha_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

כעת נגדיר שתי פונקציות d-אינטגרבליות על $\mathbb{R}^d$:

$$g \triangleq \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{I_n \cap E} \qquad h \triangleq \sum_{n=1}^N \beta_n \chi_{I_n \cap E}$$

פונקציות אלה מקיימות: $g \leq f \leq h$, ולכן:

$$\begin{aligned} 0 \leq h - g = \sum_{n=1}^N (\beta_n - \alpha_n)\chi_{I_n \cap E} \leq \sum_{n=1}^N \frac{\varepsilon}{2M}\chi_{I_n \cap E} = \frac{\varepsilon}{2M}\sum_{n=1}^N \chi_{I_n \cap E} = \frac{\varepsilon}{2M}\chi_{\cup_{n=1}^N (I_n \cap E)} \\ = \frac{\varepsilon}{2M}\chi_{I \cap E} = \frac{\varepsilon}{2M}\chi_E < \frac{\varepsilon}{M}\chi_E \end{aligned}$$

ולכן:

$$\int_{\mathbb{R}^d} (h - g) < \frac{\varepsilon}{M}\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E = \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

כלומר f היא d-אינטגרבלית, והוכחנו את (i).

כדי להוכיח את החלק השני, נגדיר את פונקציות ה-d-מדרגות הבאות:

$$\tilde{g} \triangleq \sum_{n=1}^N \alpha_n \chi_{I_i} \qquad \tilde{h} \triangleq \sum_{n=1}^N \beta_n \chi_{I_i}$$

נשים לב כי מתקיים:

$$g = \tilde{g}\chi_E \qquad h = \tilde{h}\chi_E$$

וגם:

$$\tilde{h} - \tilde{g} < \frac{\varepsilon}{M}\chi_I \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

כדי להשלים את ההוכחה: יהא $k \in \mathbb{N}$, נגדיר $\tilde{v}_k, \tilde{w}_k$ להיות $\tilde{g}, \tilde{h}$ המתאימים כאשר $\varepsilon = \frac{M}{k}$. לבסוף ניקח: $v_n \triangleq \max_{k=1}^n \tilde{v}_k$ ו-$w_n \triangleq \min_{k=1}^n \tilde{w}_k$, וסיימנו.

לבסוף מ-(9.1) ו-(9.2), נובע כי

$$f - v_m\chi_E = f\chi_E - v_m\chi_E = \chi_E(f - v_m) \leq \chi_E(w_m - v_n) \leq w_m - v_n \leq \frac{1}{m}$$

כלומר הסדרה $(v_m\chi_E)_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל-f. ■

פרק 10

אינטגרל נשנה

בפרק זה, נסמן נקודות ב-$\mathbb{R}^{d+1}$ כ-(x,y) כאשר $x \in \mathbb{R}^d$ ו-$y \in \mathbb{R}$. סימון לא שיגרתי מקל במידה על כתיבה של הטיעונים בפרק זה. נגדיר:

הגדרה 10.1 תהא $\mathcal{F}_d$ קבוצת כל הפונקציות $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ המקיימות:

(i) f היא $(d+1)$-אינטגרבילית;

(ii) לכל $x \in \mathbb{R}^d$, הפונקציה $g_x(y) \triangleq f(x,y)$ היא 1-אינטגרבילית;

(iii) הפונקציה $H(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}} g_x = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$ היא d-אינטגרבילית;

(iv) ה-$(d+1)$-אינטגרל של f מקיים:

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} f = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} g_x = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \right) dx \tag{10.1}$$

אנו נוכיח מספר טיעונים, שחלקם לא הופיעו בהרצאות, אבל טיעונים אלה הרבה יותר חזקים. קודם נוודא כי $\mathcal{F}_d$ היא משפחה שכדאי לעבוד איתה:

למה 10.1 תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה d-מדידה, ויהיו $\varphi, \psi : E \to \mathbb{R}^d$ פונקציות d-אינטגרביליות ב-E, כך ש-$\varphi \leq \psi$, ותהא:

$$W \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} | x \in E \wedge \varphi(x) \leq y < \psi(x)\}$$

אזי $\chi_W \in \mathcal{F}_d$.

הוכחה: משפט 8.3 סיפק לנו נוסחא ל-$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \chi_W$, ולכן χ_W מקיימת את דרישה (i). נניח לשם פשטות כי φ ו-ψ מתאפסות מחוץ ל-E. לכל $x \in \mathbb{R}^d$, נגדיר:

$$\begin{aligned} g_x(y) &\triangleq \chi_W(x,y) = \chi_E(x)\chi_{[\varphi(x),\psi(x))}(y) \\ H(x) &\triangleq \int_{\mathbb{R}} g_x = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\chi_{[\varphi(x),\psi(x))}(y)dy = \chi_E(x)(\psi(x)-\varphi(x)) \\ \int_{\mathbb{R}^d} H(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x)(\psi(x)-\varphi(x))dx = \int_E (\psi - \varphi) = |W|_{d+1} = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \chi_W \end{aligned}$$

כלומר χ_W מקיימת את שאר הדרישות, ולכן $\chi_W \in \mathcal{F}_d$. ■

למה 10.2 ($\mathcal{F}_d$ **היא מערכת לינארי**) לכל $f,g\in\mathcal{F}_d$ ולכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $f+ag\in\mathcal{F}_d$

הוכחה: הלמה היא תוצאה ישירה של הלינאריות של אינטגרביליות ואינטגרל.

(i) $f+ag$ היא $(d+1)$-אינטגרבילית כצירוף-לינארי של פונקציות $(d+1)$-אינטגביליות;

(ii) לכל $x\in\mathbb{R}^d$ הפונקציה $f(x,-)+ag(x,-)$ היא 1-אינטגרבילית כצירוף לינארי של פונקציות 1-אינטגרביליות: $f(x,-)$ ו-$g(x,-)$;

(iii) הפונקציה $H(x)$ $\int_{\mathbb{R}}(f(x,-)+ag(x,-))=\int_{\mathbb{R}}f(x,-)+a\int_{\mathbb{R}}g(x,-)$ היא d-אינטגרבילית כצירוף לינארי של פונקציות d-אינטגרביליות: $\int_{\mathbb{R}}f(x,-)$ ו-$\int_{\mathbb{R}}g(x,-)$;

(iv) ולבסוף:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(f+ag)&=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}f+a\int_{\mathbb{R}^{d+1}}g=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_R Rf(x,y)dy\right)dx+a\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_R Rg(x,y)dy\right)dx\\&=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(x,y)dy+a\int_{\mathbb{R}}g(x,y)dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_R R(f+ag)(x,y)dy\right)dx\end{aligned}$$ ■

למה 10.3 כל פונקצית $(d+1)$-מדרגות שייכת ל-$\mathcal{F}_d$.

הוכחה: מספיק להראות כי $\chi_I\in\mathcal{F}_d$ לכל $(d+1)$-קטע חסום I. אבל $I=I_d\times[\alpha,\beta)$ כאשר I_d הוא d-קטע חסום, ולכן I_d הוא d-מדיד, ולכן גם I $(d+1)$-מדיד, ומלמה 10.1 נקבל כי $\chi_I\in\mathcal{F}_d$, ובזכות הלמה האחרונה, כל פונקצית $(d+1)$-מדרגות שייכת ל-$\mathcal{F}_d$. ■

משפט 10.1 תהא $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת-פונקציות ב-$\mathcal{F}_d$ המתאפסות מחוץ ל-$(d+1)$-קטע משותף I חסום, והמתכנסות במ"ש ל-f, אזי גם $f\in\mathcal{F}_d$.

הוכחה: כדי להוכיח זאת, נשתמש בחוקי גבולות אינטגרלים של סדרות כאלה. דרישה (i) טריוויאלית. נגדיר:

$$\begin{aligned}g_{m,x}(y)&\triangleq f_m(x,y)\\g_x(y)&\triangleq f(x,y)\end{aligned}$$

ברור כי לכל $x\in\mathbb{R}$, הסדרה $(g_{m,x})_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל-g_x: לכל $\varepsilon>0$ נבחר את $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ להיות אותו ה-N_ε של הסדרה המקורית, ולכן g_x היא 1-אינטגרבילית לכל $x\in\mathbb{R}$, ותנאי (ii) מתקיים. נגדיר:

$$\begin{aligned}H_m(x)&\triangleq\int_{\mathbb{R}}g_{m,x}=\int_{\mathbb{R}}f_m(x,y)dy\\H(x)&\triangleq\int_{\mathbb{R}}g_x=\int_{\mathbb{R}}f(x,y)dy\end{aligned}$$

H_m היא d-אינטגרבילית לכל $m \in \mathbb{N}$. נוכיח כי הסדרה $(H_m)_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל-H. היות ו-I חסום, נוכל לכתוב אותו כ-$I = I_d \times [\alpha, \beta)$.

$$|H(x) - H_m(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x,y) - f_m(x,y))dy \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_{[\alpha,\beta)} \alpha_m \right| = \alpha_m(\beta - \alpha)$$

כאשר $(\alpha_m)_{m=1}^{\infty}$ היא סדרה המתכנסת ל-0 ומקיימת $|f - f_m| < \alpha_m$ לכל $m \in \mathbb{N}$. כלומר $(H_m)_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל-H, ולכן H d-אינטגרבילית, ודרישה (iii) הושגה. לבסוף נראה כי גם הדרישה האחרונה מתקיימת. H_m מתאפסות כולן חוץ ל-I_d, ולכן

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} H = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} H_m = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} f_m = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} f \quad \blacksquare$$

משפט 10.2 תהא W קבוצה $(d+1)$-מדידה, ותהא $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה במ"ש ב-W ומתאפסת לחוץ ל-W, אזי $f \in \mathcal{F}_d$.

הוכחה: קיימת סדרת פונקציות $(d+1)$-מדרגות המתכנסות במ"ש ל-f, ומתאפסות כולן מחוץ ל-$(d+1)$-קטע חסום משותף המכיל את W. $\blacksquare$

בהרצאה הוצג לנו:

משפט 10.3 (**מקרה פרטי של משפט פוביני**) תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה d-מדידה, ויהיו $\varphi, \psi : E \to \mathbb{R}$ פונקציות רציפות במ"ש ב-E ומקיימות $\varphi \le \psi$. תהא

$$W \triangleq \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} \middle| \, x \in E \wedge \varphi(x) \le y < \psi(x) \right\}$$

תהא $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ הרציפה במ"ש ב-W, ומתאפסת מחוץ ל-W, אזי $f \in \mathcal{F}_d$.

הוכחה: מקרה פרטי של המשפט הקודם. $\blacksquare$

הפרק הבא יעסוק ב-∞.

פרק 11

אינטגרלים מוכללים

בפרק זה נעסוק "באינטגרלים באינסוף".

הגדרה 11.1 (**אינטגרל מוכלל עם גבולות סופיים**) תהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.

1. אם $\lim\limits_{r\to a^+} f(r)$ קיים, ולכל $r\in(a,b)$ f 1-אינטגרבילית ב-(a,r), אזי נגדיר את **האינטגרל המוכלל** של f ב-(a,b) להיות:
$$\int_a^b f \triangleq \lim_{r\to b^-}\int_a^r f$$

2. אם $\lim\limits_{r\to b^-} f(r)$ קיים, ולכל $r\in(a,b)$ f 1-אינטגרבילית ב-(r,b), אזי נגדיר את **האינטגרל המוכלל** של f ב-(a,b) להיות:[1]
$$\int_a^b f \triangleq \lim_{r\to a^+}\int_r^b f$$

3. אם $\lim\limits_{r\to a^+} f(r)$ וגם $\lim\limits_{r\to b^-} f(r)$ לא קיימים, ו-f 1-אינטגרבילית בכל קטע פתוח ב-(a,b), אזי נגדיר את **האינטגרל המוכלל** של f ב-(a,b) בשני אופנים:
$$\int_a^b f \triangleq \int_a^c f + \int_c^a f$$
$$(Sym)\int_a^b f \triangleq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f$$
כאשר $c\in(a,b)$ (אין זה משנה מהו c).

טענה 11.1 אי-קיום גבול בהגדרה הנ"ל, פירושו קיום גבול במובן הרחב - $\pm\infty$.

הוכחה: אם f 1-אינטגרבילית בקטע כלשהוא, אזי f חסומה. ■

[1] הסימון $\int (Sym)$ הוא המצאה שלי, שבה להזכיר כי הגבולות סימטרים

טענה 11.2 תהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ כך ש-$\lim\limits_{r\to a^+} f(r)$ וגם $\lim\limits_{r\to b^-} f(r)$ לא קיימים, אזי אם $(Sym)\int_a^b f$ קיים, אזי גם $\int_a^b f$ קיים ושווה לו.

הגדרה 11.2 (**אינטגרל מוכלל עם גבולות אינסופיים**) תהא $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, ה-1-אינטגריבילית על $[a,r)$ לכל $r>a$, אזי נגדיר את **האינטגרבל המוכלל** של f ב-$[a,\infty)$ להיות:

$$\int_a^\infty f \triangleq \lim_{a<r\to\infty}\int_a^r f$$

תהא $f:(-\infty,a)\to\mathbb{R}$, ה-1-אינטגריבילית על $[r,a)$ לכל $r<a$, אזי נגדיר את **האינטגרבל המוכלל** של f ב-$(-\infty,a)$ להיות:

$$\int_{-\infty}^a f \triangleq \lim_{a>r\to-\infty}\int_r^a f$$

תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ה-1-אינטגרבילית על כל 1-קטע, אזי נגדיר את **האינטגרבל המוכלל** של f ב-$\mathbb{R}$ בשני אופנים:

$$\int_{-\infty}^\infty f \triangleq \int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f$$
$$(PV)\int_{-\infty}^\infty f \triangleq \lim_{r\to\infty}\int_{c-\infty}^{c+\infty} f$$

כאשר $c\in\mathbb{R}$, ובדרך-כלל $c=0$.